

Beurteilung der Leistung optischer Systeme bei inkohärenter Abbildung

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von
Anton Bigelmaier
aus Oberwaldbach

Marburg 1968

Beurteilung der Leistung optischer Systeme bei inkohärenter Abbildung

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps-Universität Marburg



vorgelegt von

Anton Bigelmaier

aus Oberwaldbach

Marburg 1968



Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps-Universität
Marburg als

Dissertation angenommen am 10. 12. 68

Tag der mündlichen Prüfung: 18. 12. 68

1. Berichterstatter : Prof. Dr. H. Wolter

2. Berichterstatter : Prof. Dr. Großmann

1.	Aufgabenstellung	1
	Teil I. Kennzeichnung der inkohärenten optischen Abbildung durch Beschreibungsparameter der Intensitäts- bzw. Übertragungsfunktion	2
2.	Die Intensitätsfunktion als Ausgangsgröße	2
3.	Die Intensitätsmomente	4
4.	Abhängigkeit der Intensitätsmomente des Linienbildes von den Intensitätsmomenten des Punktbildes	12
5.	Bestimmung der Intensitätsmomente aus den Strahlaberrationen	13
6.	Die Übertragungsfunktion und ihre Darstellung durch Intensitätsmomente	15
7.	Darstellung der linearen Übertragungskette durch Intensitätsmomente	16
8.	Die Übertragungsmomente	18
9.	Darstellung der Intensitätsfunktion durch Übertragungsmomente	19
10.	Darstellung der Intensitätsfunktion durch HERMITE'sche Funktionen	20
11.	Darstellung der Übertragungsfunktion durch HERMITE'sche Funktionen	25
12.	Bestimmung der Intensitätsmomente aus den Entwicklungskoeffizienten	26
13.	Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten aus den Intensitätsmomenten	31
14.	Darstellung des Faltungsintegrals durch HERMITE'sche Funktionen	33
	Teil II. Die Bewertung der inkohärenten optischen Abbildung bei Vorgabe beliebiger Objektstrukturen	36
15.	Notwendigkeit einer Theorie der Bildbewertung	36
16.	Herleitung der Bewertungsformel	37
17.	Bewertung der Linientest-Abbildung	41
18.	Bewertung der Kantentest-Abbildung	44
19.	Bewertung der Gittertest-Abbildung	51
20.	Bewertung der Mirentest-Abbildung	56
21.	Das Aussagevermögen der Bewertungsgrößen	71
22.	Zusammenfassung der Ergebnisse	76
	Literaturverzeichnis	78



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554409_0017

1. Aufgabenstellung

Der Konstrukteur, der mit der Berechnung eines optischen Systems vertraut ist, beurteilt dessen Leistung anhand der Strahlaberrationen bzw. der Bildfehler. Die richtige Beurteilung setzt jedoch eine sehr große Erfahrung im Umgang mit diesen Größen voraus. Dem Benutzer, der in der Regel mit Strahlaberrationen oder Bildfehlern nicht umzugehen weiß, sagen diese Größen wenig oder nichts.

Schon früh hat man sich daher für die Intensitätsverteilung des Punkt- bzw. Linienbildes interessiert. Dieser physikalisch eindeutigen Beschreibung des Abbildungszustandes wurde von DUFFIEUX [1] eine gleichwertige Methode zugeordnet: die Beschreibung des Abbildungszustandes durch die FOURIER-Transformierte des Punkt- bzw. Linienbildes, für die sich die Bezeichnung "Übertragungsfunktion" eingebürgert hat.

Obwohl der Benutzer mit diesen Größen schon sehr viel mehr anfangen kann, besteht trotzdem der Wunsch nach einer Kurzkennzeichnung der Abbildungsleistung optischer Systeme. Es existieren zahlreiche, zum Teil schon sehr alte Vorschläge in dieser Richtung. Aufgabe dieser Untersuchung soll es sein, einige dieser Vorschläge genauer zu untersuchen bzw. so zu erweitern, daß eine einwandfreie Beschreibung der Bewertung der optischen Abbildung möglich wird. Qualitätskriterien, die aufgrund psychometrischer Untersuchungen hergeleitet wurden, berücksichtigen wir hier nicht.

Ziel der nachfolgenden Untersuchung ist die Erarbeitung einwandfreier Grundlagen für die Bildbewertung. Diese sollten dann Ausgangspunkt sein für Hinweise, die den Optikonstrukteur bei der Beurteilung und Entwicklung neuer optischer Systeme unterstützen, mit deren Hilfe eine brauchbare Theorie der Fertigungstoleranzen optischer Systeme aufgestellt werden kann und die für den Benutzer eine kurze, aber aussagefähige Leistungskennzeichnung der optischen Systeme ermöglichen.

2. Die Intensitätsfunktion als Ausgangsgröße

Das klassische Verfahren, den Abbildungszustand eines optischen Systems zu kennzeichnen, besteht in der Angabe der Intensitätsfunktion $L(x)$ des Linienbildes. Sie ist experimentell einfacher zu gewinnen als die im letzten Jahrzehnt

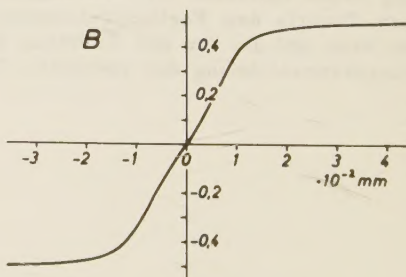
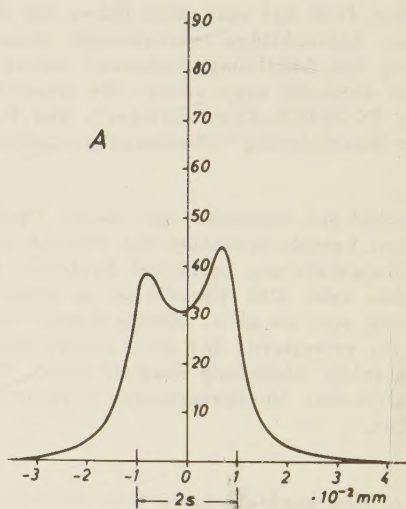
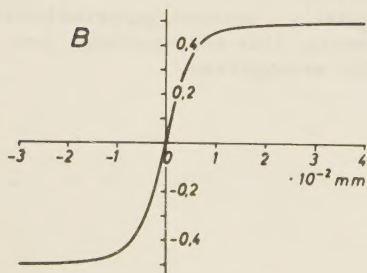
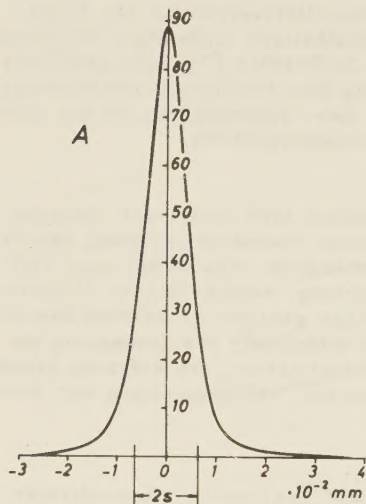


Fig. 1

Gemessene Linienfunktionen (A) und durch Integration erhaltene Kantenfunktionen (B) bei bester Einstellung auf der Achse für ein Fotoobjektiv.

Fig. 2

Linienfunktion (A) und Kantenfunktion (B) bei defokussierter Einstellung.

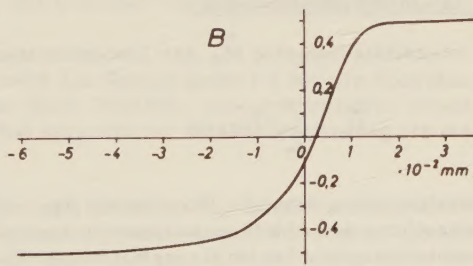
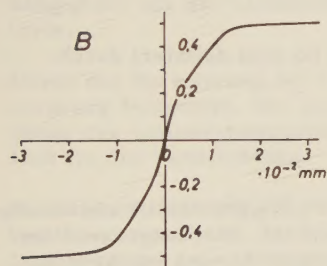
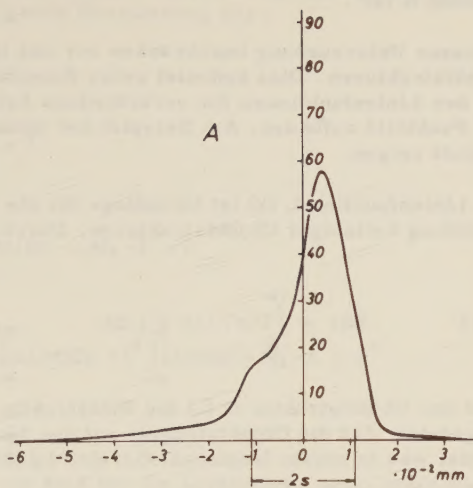
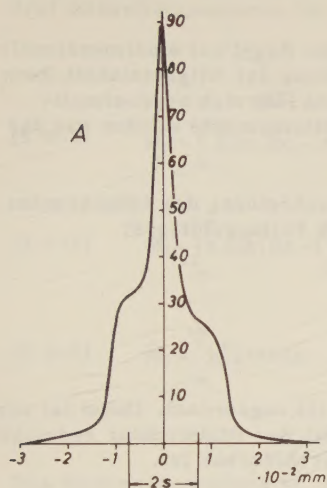


Fig. 3

Linienfunktion (A) und Kantenfunktion (B) bei defokussierter Einstellung.

Fig. 4

Linienfunktion (A) und Kantenfunktion (B) mit starker Koma behaftet.

aktuell gewordene Übertragungsfunktion, läßt sich grafisch durch eine einzige Kurve darstellen und enthält selbstverständlich die vollständige Information, die durch die Abbildung vermittelt werden kann.

In den Fig. 1A bis 4A sind für die Praxis typische Intensitätsfunktionen $L(x)$ des Linienbildes und in den Fig. 1B bis 4B die aus diesen durch Integration erhaltenen Intensitätsfunktionen $K(x)$ des Kantenbildes dargestellt. Insbesondere ist bei $K(x)$ auf die spezielle Wahl des Ordinaten-Nullpunkts hinzuweisen.

Nachfolgend nennen wir die Intensitätsfunktion des Linienbildes oft kürzer "Linienfunktion $L(x)$ " und die Intensitätsfunktion des Kantenbildes "Kantenfunktion $K(x)$ ".

In dieser Untersuchung beschränken wir uns in der Regel auf eindimensionale Objektstrukturen. Dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn aus den Linienfunktionen für verschiedene Azimute läßt sich approximativ das Punktbild aufbauen. Am Beispiel der Intensitätsmomente werden wir das explizit zeigen.

Die Linienfunktion $L(x)$ ist Grundlage für die Beschreibung der inkohärenten Abbildung beliebiger Objektstrukturen. Durch das Faltungsintegral

$$(2.1) \quad B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x') L(x-x') dx'$$

wird der Objektstruktur $O(x)$ die Bildstruktur $B(x)$ zugeordnet. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Objektstruktur auf den Maßstab der Bildstruktur reduziert wurde, was in einem Isoplanasiebereich leicht durchführbar ist.

3. Die Intensitätsmomente

Die Intensitätsmomente M_v^* der Linienfunktion $L(x)$ sind definiert durch

$$(3.1) \quad M_v^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^v L(x) dx$$

und stellen einen Satz von Parametern dar, der für die physikalisch eindeutige Beschreibung des Abbildungszustandes ausreichend ist. Die Konvergenz der Momentenintegrale ist im Grenzfall reiner Beugung nicht ohne weiteres gesichert. Durch Anwendung des von WOLTER [4] benutzten Limitierungsverfahrens

$$(3.2) \quad M_v^* = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\alpha x^2\} x^v L(x) dx$$

kann jedoch unter recht allgemeinen Voraussetzungen Konvergenz erreicht werden. Wenn die Strahlaberrationen groß sind - und diesen Fall behandeln wir hier - treten diese Konvergenzschwierigkeiten nicht auf.

Bei der Darstellung der Intensitätsmomente ist die Wahl des Koordinatensprungs frei. Bei Änderung des Koordinatensprungs nehmen die Intensitätsmomente andere Werte an:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} M_v &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)^v L(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=0}^v \binom{v}{\mu} (-t)^\mu x^{v-\mu} L(x) dx \\ &= - \sum_{\mu=0}^v \binom{v}{\mu} (-t)^\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x^{v-\mu} L(x) dx = - \sum_{\mu=0}^v \binom{v}{\mu} (-t)^\mu M_{v-\mu}^* \end{aligned}$$

In Anlehnung an das in der Statistik übliche Vorgehen nutzen wir die ersten drei Intensitätsmomente für folgende Normierung aus :

$$(3.4-0) \quad M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) dx = \overset{*}{M}_0 = 1$$

$$(3.4-1) \quad M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x L(x) dx - t \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) dx = \overset{*}{M}_1 - t = 0$$

$$(3.4-2) \quad M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 L(x) dx - 2t \int_{-\infty}^{+\infty} x L(x) dx + t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) dx = \overset{*}{M}_2 - t^2 = s^2$$

Das Intensitätsmoment M_0 ist ein Maß für die Lichtstärke eines optischen Systems und berücksichtigt sowohl die Apertur als auch die Lichtverluste im System. Die Festsetzung $M_0 = 1$ normiert die Linienfunktion auf Unabhängigkeit von der Lichtstärke und bedeutet Vernachlässigung der Lichtverluste.

Durch die Normierung $M_1 = 0$ wird der Schwerpunkt $t = \overset{*}{M}_1$ als Koordinatenursprung festgelegt. Die auf die ideale Bildhöhe bezogene relative Abweichung des Linienschwerpunkts bei tangentialer Objektorientierung ist ein Maß für die Verzeichnung.

Durch die Festsetzung $M_2 = s^2$ wird schließlich der Linienfunktion eine Streubreite s zugeordnet. Dieses auf den Linienschwerpunkt bezogene Moment 2-ter Ordnung ist das bekannte GAUSZ-Moment, dessen Bedeutung in jüngster Zeit vor allem von LUKOSZ [5] herausgestellt wurde. In dieser Untersuchung werden wir erneut die zentrale Bedeutung des GAUSZ-Moments bzw. der Streubreite erkennen.

Wie in der Statistik üblich ordnen wir per definitionem den Intensitätsmomenten M_v die auf die Streubreite $s = 1$ reduzierten Intensitätsmomente m_v zu durch die Beziehung

$$(3.5) \quad m_v = \frac{M_v}{s^v}.$$

Wir erkennen jetzt auch die geometrische Bedeutung der Streubreite s : sie wirkt wie ein Maßstabsfaktor. Über die spezielle Gestalt der Linienfunktion $L(x)$ macht sie jedoch keine Aussage.

Durch die Normierungen (3.3) sind die drei ersten reduzierten Intensitätsmomente festgelegt. Die weiteren reduzierten Intensitätsmomente stellen reine Formfaktoren dar und geben Auskunft über die spezielle Gestalt der Linienfunktion unabhängig von der Streubreite s .

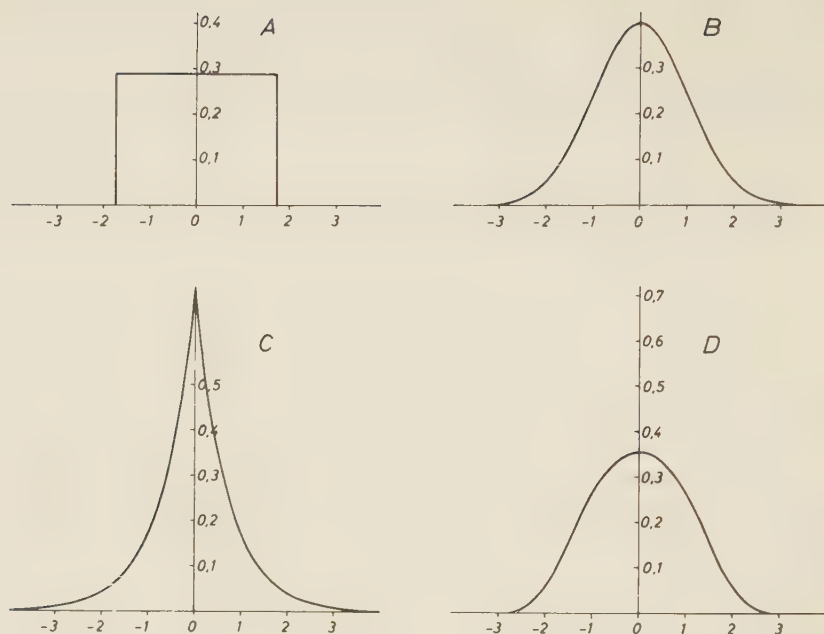


Fig. 5

Darstellung einiger analytisch definierter Linienfunktionen:

A Rechteckfunktion, B GAUSZ'sche Glockenfunktion, C FRIESER'sche Verwaschungsfunktion, D aus Parabelstücken zusammengesetzte Linienfunktion. Die Normierung ist der guten Vergleichbarkeit wegen zu $m_0 = 1$, $m_1 = 0$ und $m_2 = s = 1$ angenommen.

Beispiel 1 Der Rechteckspalt nach Fig. 5 A lässt sich darstellen durch

$$(B1.1) \quad L(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq -a, \\ \frac{1}{2a} & \text{für } -a \leq x \leq +a, \\ 0 & +a \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Da der Linienschwerpunkt bei $t = 0$ liegt, ist $M_v = \overset{*}{M}_v$. Die Intensitätsmomente nehmen die Werte

$$(B 1.2) \quad M_v = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} x^v dx = \begin{cases} \frac{a^v}{v+1} & \text{für } v = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 \end{cases}$$

an. Mit $s = a / \sqrt{3}$ erhalten wir für die reduzierten Intensitätsmomente

$$(B 1.3) \quad m_v = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}^v}{v+1} & \text{für } v = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 \end{cases}$$

Beispiel 2 Die GAUSZ'sche Glockenkurve nach Fig. 5B mit der Darstellung

$$(B 2.1) \quad L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

ergibt, da auch hier $t = 0$ und damit $M_v = \overset{*}{M}_v$ ist, für die Intensitätsmomente

$$(B 2.2) \quad \begin{aligned} M_v &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^v \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 \right\} dx \\ &= \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (v-1) \sigma^v & \text{für } v = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen $s = \sigma$ nehmen die reduzierten Intensitätsmomente die folgenden Werte an

$$(B 2.3) \quad m_v = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (v-1) & \text{für } v = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 \end{cases}$$

Beispiel 3 Die FRIESER'sche Verwaschungsfunktion, in Fig. 5 C dargestellt und definiert durch die Beziehung

$$(B 3.1) \quad L(x) = \frac{1}{2a} \exp \left\{ -\frac{|x|}{a} \right\},$$

ergibt für die Intensitätsmomente

$$(B 3.2) \quad \begin{aligned} M_v &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} x^v \exp \left\{ -\frac{|x|}{a} \right\} dx \\ &= \begin{cases} v! a^v & \text{für } v = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Mit $s = \sqrt{2}a$ erhalten wir für die reduzierten Intensitätsmomente

$$(B\ 3.3) \quad m_\nu = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}^\nu}{\sqrt{2}^\nu} & \text{für } \nu = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 & \end{cases}$$

Auch hier konnten wir wegen $t = 0$ die Beziehung $M_\nu = \overset{*}{M}_\nu$ ausnutzen.

Beispiel 4 Linienfunktion aus Parabelstücken nach Fig. 5 D mit der Darstellung

$$(B\ 4.1) \quad L(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq -2a \\ \left(\frac{x}{a} + 2\right)^2 & -2a \leq x \leq -a \\ 2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{für } -a \leq x \leq +a \\ \left(\frac{x}{a} - 2\right)^2 & +a \leq x \leq +2a \\ 0 & +2a \leq x < +\infty \end{cases}$$

Da auch hier der Linienschwerpunkt bei $t = 0$ liegt, also $M_\nu = \overset{*}{M}_\nu$ ist, erhalten wir für die Intensitätsmomente

$$(B\ 4.2) \quad M_\nu = \frac{1}{2a} \int_{-2a}^{-a} x^\nu \left[\left(\frac{x}{a} + 2\right)^2\right] dx + \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} x^\nu \left[2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] dx + \frac{1}{2a} \int_{+a}^{+2a} x^\nu \left[\left(\frac{x}{a} - 2\right)^2\right] dx$$

$$= \begin{cases} \frac{2(2^{\nu+2} - 1)a^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} & \text{für } \nu = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 & \end{cases}$$

Die diesen zugeordneten reduzierten Intensitätsmomente nehmen dann wegen $s = a/\sqrt{2}$ die Werte

$$(B\ 4.3) \quad m_\nu = \begin{cases} \frac{2(2^{\nu+2} - 1)\sqrt{2}^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} & \text{für } \nu = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ 0 & \end{cases}$$

an.

Beispiel 5 Dreieckspalte haben die Darstellung

$$(B 5.1) \quad L(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq -a \\ \frac{2}{a+b} \left(1 + \frac{x}{a}\right) & -a \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{a+b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) & 0 \leq x \leq b \\ 0 & b \leq x < +\infty \end{cases} \quad \text{für}$$

Für $a + b$ sind sie unsymmetrisch; diese Unsymmetrie kann durch die Schiefe σ

$$(B 5.2) \quad \sigma = \frac{a-b}{a+b}$$

ausgedrückt werden. Bei vorgegebener Basisbreite $c = a + b$ und Schiefe σ folgt für die Größen a und b ,

$$(B 5.3) \quad a = \frac{1+\sigma}{2} c, \quad b = \frac{1-\sigma}{2} c$$

Der Koordinatenursprung ist so gewählt, daß der Maximalwert von $L(x)$ den Abszissenwert 0 hat. Die auf diesen Koordinatenursprung bezogenen Intensitätsmomente haben die Werte

$$(B 5.4) \quad \begin{aligned} \overset{*}{M}_v &= \frac{2}{a+b} \int_{-a}^0 x^v \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx + \frac{2}{a+b} \int_0^b x^v \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx \\ &= \frac{2}{a+b} \left\{ \frac{b^{v+1} - (-a)^{v+1}}{(v+1)(v+2)} \right\} \end{aligned}$$

Die ersten drei Momente lauten explizit

$$(B 5.5-0) \quad \overset{*}{M}_0 = \frac{2}{a+b} \left\{ \frac{b+a}{1 \cdot 2} \right\} = 1$$

$$(B 5.5-1) \quad \overset{*}{M}_1 = \frac{2}{a+b} \left\{ \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot 3} \right\} = - \frac{a-b}{3} = -p$$

$$(B 5.5-2) \quad \overset{*}{M}_2 = \frac{2}{a+b} \left\{ \frac{b^3 + a^3}{3 \cdot 4} \right\} = \frac{a^2 - ab + b^2}{b} = M_2 + p^2$$

Im Schwerpunkt-Koordinatensystem erhalten wir statt (B 5.1) die Darstellung

$$(B 5.6) \quad L(u) = \frac{2}{a+b} \begin{cases} 0 & -\infty < u \leq -A \\ \frac{1}{a} [A+u] & -A \leq u \leq p \\ \frac{1}{b} [B-u] & p \leq u \leq B \\ 0 & B \leq u < +\infty \end{cases} \quad \text{für}$$

wo $A = a-t$ und $B = b+t$. Dies ist in Fig. 6 für die Schiefen $\sigma = 0; 0,5; 1,0$ dargestellt. Für die auf den Schwerpunkt bezogenen Intensitätsmomente finden wir

$$(B 5.7) \quad M_v = \frac{2}{c \cdot a} \int_{-A}^p u^v [A+u] du + \frac{2}{c \cdot b} \int_p^B u^v [B-u] du$$

$$= \frac{2}{c} \left\{ \frac{1}{a} \left[\frac{A}{v+1} \langle p^{v+1} - (-A)^{v+1} \rangle + \frac{1}{v+2} \langle p^{v+2} - (-A)^{v+2} \rangle \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b} \left[\frac{B}{v+1} \langle B^{v+1} - p^{v+1} \rangle - \frac{1}{v+2} \langle B^{v+2} - p^{v+2} \rangle \right] \right\}$$

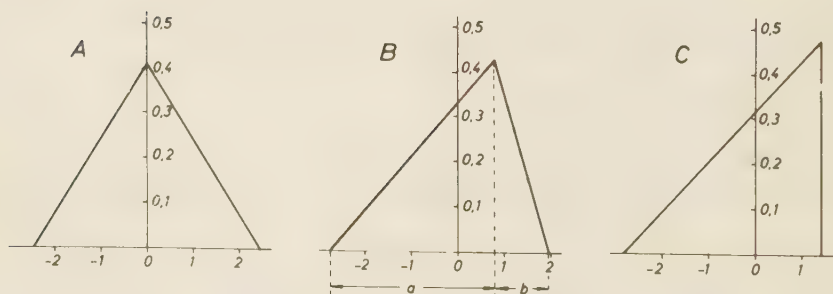


Fig. 6

Darstellung von Dreiecksfunktionen für die Schiefen $\sigma = 0; 0,5; 1,0$. Als Normierung ist $m_0 = 1$, $m_1 = 0$ und $m_2 = 1$ gewählt.

Im Falle $v = 2$ erhalten wir mit (B 5.2)

$$(B\ 5.8) \quad M_2 = s^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{18} = \frac{3 + \sigma^2}{72} c^2$$

Für eine vorgegebene Streubreite s und Schiefe σ können wir somit nach (B 5.8) und (B 5.3) leicht die Größen a und b berechnen.

Tabelle 1: Numerische Werte der reduzierten Intensitätsmomente m_v der in den Fig. 5 und 6 dargestellten Linienfunktionen für $v = 3, 4, \dots, 11$.

Nr.	Rechteckfunktion	Glockenfunktion	Verwaschungsfunktion	Funktion aus Parabelstücken	Dreiecksfunktion mit Schiefe		
					0,0	0,5	1,0
3	0	0	0	0	0	-0,4224	-0,5657
4	1,8	3,0	6,0	2,4	2,4	2,4	2,4
5	0	0	0	0	0	-2,4137	-3,2325
6	3,8571	1,5(+1)	9,0(+1)	8,0952	7,7143	8,3515	8,8571
7	0	0	0	0	0	-1,2672(+1)	-1,6971(+1)
8	9,0	1,05(+2)	2,52(+3)	3,3067(+1)	2,88(+1)	3,5937(+1)	4,1600(+1)
9	0	0	0	0	0	-6,7726(+1)	-9,2155(+1)
10	2,2091(+1)	9,45(+2)	1,1340(+5)	1,5273(+2)	1,1782(+2)	1,7621(+2)	2,2255(+2)
11	0	0	0	0	0	-3,7411(+2)	-5,2565(+2)

In Tabelle 1 sind für die vorgegebenen Beispiele die numerischen Werte der reduzierten Intensitätsmomente wiedergegeben. Wir stellen fest, daß diese

1. schwach anwachsen, wenn die Scheitelbreite der Linienfunktion im Verhältnis zur Fußbreite groß ist, und
2. stark anwachsen, wenn die Scheitelbreite im Verhältnis zur Fußbreite klein ist.

Die Folge der Intensitätsmomente stellt also eine Kennzeichnung der Linienfunktion dar, die für eine Anwendung in der Praxis durchaus geeignet ist. Für eine erste Formkennzeichnung ist die Angabe des 3-ten und 4-ten reduzierten Intensitätsmoments ausreichend.

4. Abhängigkeit der Intensitätsmomente des Linienbildes von den Intensitätsmomenten des Punktbildes

Gegeben sei gemäß Fig. 7 in einem Koordinatensystem x, y die Intensitätsfunktion $P(x, y)$ eines Punktbildes.

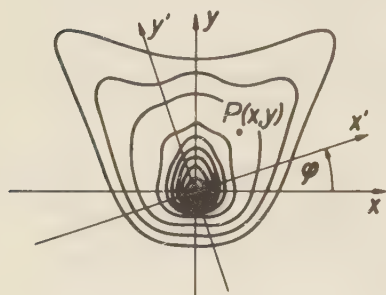


Fig. 7

Intensitätsfunktion $P(x, y)$ eines Punktbildes, dargestellt durch Isophoten. Das Koordinatensystem (x', y') ist gegenüber dem Koordinatensystem (x, y) um den Winkel φ gedreht.

Die Intensitätsfunktion $L(x')$ eines Linienbildes, das gegenüber der x -Achse um den Winkel φ gedreht ist, läßt sich darstellen durch

$$(4.1) \quad L(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x', y') dy'$$

wohei das Koordinatensystem x', y' mit dem Koordinatensystem x, y zusammenhängt über die lineare Koordinatentransformation

$$(4.2-1) \quad x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

$$(4.2-2) \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Für das ν -te Intensitätsmoment erhalten wir

$$(4.3) \quad M_{\nu}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'^{\nu} L(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} x'^{\nu} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x', y') dy' \right] dx'.$$

Einsetzen von (4.2) ergibt wegen

$$(4.4) \quad dx' dy' = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} dx dy = dx dy$$

für die Darstellung der Intensitätsmomente des Linienbildes

$$(4.5) \quad M_{\nu}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^{\nu} P(x, y) dx dy \\ = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \binom{\nu}{\alpha} (\cos \varphi)^{\nu-\alpha} (\sin \varphi)^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu-\alpha} y^{\alpha} P(x, y) dx dy,$$

wobei mit

$$(4.6) \quad M_{\nu-\alpha, \alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu-\alpha} y^{\alpha} P(x, y) dx dy$$

die Intensitätsmomente des Punktbildes $P(x, y)$ bezeichnet seien. Mit dieser Abkürzung erhalten wir schließlich

$$(4.7) \quad M_{\nu}(\varphi) = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \binom{\nu}{\alpha} (\cos \varphi)^{\nu-\alpha} (\sin \varphi)^{\alpha} M_{\nu-\alpha, \alpha}.$$

Die Beziehung (4.7) sagt aus, wie wir vorzugehen haben, wenn wir aus den Intensitätsmomenten $M_{\nu-\alpha, \alpha}$ des Punktbildes $P(x, y)$ die Intensitätsmomente $M_{\nu}(\varphi)$ des um den Winkel φ gedrehten Linienbildes $L(x)$ berechnen wollen.

Darüber hinaus zeigt uns die Beziehung (4.7), wie wir aus den Intensitätsmomenten $M_{\nu}(\varphi)$ von Linienbildern, die für verschiedene Azimute vorliegen, die Intensitätsmomente $M_{\nu-\alpha, \alpha}$ des Punktbildes berechnen können. Wir lesen die Regel ab: Für die Bestimmung der Intensitätsmomente eines Punktbildes bis einschließlich ν -ter Ordnung ist die Kenntnis der Intensitätsmomente $M_{\nu}(\varphi)$ der Linienbilder für $\nu+1$ verschiedene Azimute erforderlich. Durch geschickte Wahl der Azimute φ kann die Auflösung des entstehenden linearen Gleichungssystems sehr vereinfacht werden.

5. Bestimmung der Intensitätsmomente aus den Strahlaberrationen

Wir gehen aus von den bildseitigen Strahlgrößen, wie sie bei einer der üblichen Methoden der Strahldurchrechnung anfallen. Dabei haben wir

1. die auf den Hauptstrahl bezogenen Queraberrationen in der GAUSZ'schen Bildebene

$$(5.1-1) \quad x_0 = x_0(A_x, A_y),$$

$$(5.1-2) \quad y_0 = y_0(A_x, A_y);$$

2. die Richtungsgrößen des Strahls (als Tangens)

$$(5.2-1) \quad s = s(A_x, A_y),$$

$$(5.2-2) \quad t = t(A_x, A_y)$$

3. die Verschiebung z der Bildebene, die positiv zu zählen ist, wenn die Bildebene vom letzten Linsenscheitel weggeschoben wird.

Die Größen A_x, A_y sind Aperturgrößen, in unserem Fall Lotaperturen. Für eine beliebige Bildebene erhalten wir die Aberrationswerte

$$(5.3-1) \quad x = x_0 + z \cdot s$$

$$(5.3-2) \quad y = y_0 + z \cdot t$$

Aus diesen Aberrationswerten wollen wir die Intensitätsmomente $M_{\mu\nu}$ des Punktbildes $P(x, y)$ berechnen. Dies geschieht nach der Beziehung

$$(5.4) \quad M_{\mu\nu} = \iint_{A_x, A_y} x^\mu(A_x, A_y) y^\nu(A_x, A_y) dA_x dA_y.$$

Dabei ist über die Pupille zu integrieren.

Für die numerische Bestimmung der Intensitätsmomente hat es sich als günstig erwiesen, für die Aperturvariablen A_x, A_y Polarkoordinaten einzuführen:

$$(5.5-1) \quad A_x = A \cos \varphi, \quad A_y = A \sin \varphi,$$

$$(5.5-2) \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \varphi = \arcsin(A_y/A).$$

Das ergibt für die Momentenformel

$$(5.6) \quad M_{\mu\nu} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{\underline{A}(\varphi)}^{\bar{A}(\varphi)} x^\mu(A, \varphi) y^\nu(A, \varphi) A dA d\varphi.$$

Die Strahldurchrechnung erfolgt zweckmäßig für eine quadratische Abstufung der Aperturwerte A , die Bestimmung der Grenzaperturen $\underline{A}(\varphi)$ und $\bar{A}(\varphi)$ für jeden Aperturschnitt des Winkels φ . Die Aberrationspotenzen an den gerechneten Aperturstellen werden interpoliert und die so erhaltenen Interpolationspolynome können im Integrationsbereich analytisch integriert werden. Die Integration über die Azimute φ erfolgt günstiger numerisch.

Wie aus den Intensitätsmomenten $M_{\mu\nu}$ des Punktbildes die Intensitätsmomente M_{ν} des Linienbildes gewonnen werden, zeigt die Formel (4.7). Für radiale Objektorientierung erhalten wir

$$(5.7) \quad M_{\mu 0} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{\underline{A}(\varphi)}^{\bar{A}(\varphi)} [x(A, \varphi)]^\mu A dA d\varphi$$

und für tangentielle Objektorientierung

$$(5.8) \quad M_{0v} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{\Delta(\varphi)}^{\bar{\Delta}(\varphi)} \left[y(A, \varphi) \right]^v A dA d\varphi.$$

Damit sind wir in der Lage, für jede gewünschte Bildebene die Intensitätsmomente $M_{\mu\nu}$ des Punktbildes zu berechnen.

6. Die Übertragungsfunktion und ihre Darstellung durch Intensitätsmomente

Aus der Intensitätsfunktion $L(x)$ eines Linienbildes wird durch FOURIER-Transformation die Übertragungsfunktion

$$(6.1) \quad \Lambda(\xi) = \mathcal{F} \{ L(x) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \exp \{ -i \xi x \} dx$$

gewonnen. Dabei ist zu beachten, daß die Ortsfrequenz ξ abweichend von der üblichen Definition den Faktor 2π enthält.

$$(6.2) \quad \xi = 2\pi R.$$

R wird in Perioden/mm gemessen. Diese Definition der Ortsfrequenz hat den Vorteil, daß die nachfolgende Momentendarstellung der Übertragungsfunktion einfacher wird.

Ersetzen wir in (6.1) in bekannter Weise die Exponentialfunktion durch ihre Potenzreihe und beachten wir die Normierungen (3.3), so erhalten wir nach WOLTER [4, 6, 7]

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \Lambda(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-i \xi x)^v}{v!} dx \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-i \xi)^v}{v!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^v L(x) dx = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-i)^v M_v}{v!} \xi^v. \end{aligned}$$

Vergleichen wir diese ∞ -Reihe gliedweise mit der TAYLORentwicklung der Übertragungsfunktion

$$(6.4) \quad \Lambda(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{(v)}(0)}{v!} \xi^v,$$

so finden wir zwischen den Intensitätsmomenten und den Ableitungen der Übertragungsfunktion den bekannten Zusammenhang

$$(6.5) \quad M_{\nu} = i^{\nu} \mathcal{A}^{(\nu)}(0) .$$

Wir wollen als Ergebnis festhalten: Die Reihe der Intensitätsmomente M_{ν} stellt eine Entwicklung der Übertragungsfunktion um die Ortsfrequenz $\xi = 0$ dar. Je mehr Intensitätsmomente zur Beschreibung herangezogen werden, desto größer ist der Frequenzbereich, für den gültige Aussagen über die Abbildungsqualität möglich sind. Die Intensitätsmomente niedriger Ordnung beschreiben primär und in Übereinstimmung mit der seitherigen Interpretation des GAUSZ-Moments die Kontrastwiedergebeeigenschaften eines optischen Systems.

7. Darstellung der linearen Übertragungskette durch Intensitätsmomente

Bezeichnet man die FOURIER-Transformierte der Objektstruktur $O(x)$ mit

$$(7.1) \quad \check{O}(\xi) = \mathcal{F}\{O(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x) \exp\{-i\xi x\} dx$$

und die FOURIER-Transformierte der Bildstruktur mit

$$(7.2) \quad \check{B}(\xi) = \mathcal{F}\{B(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \exp\{-i\xi x\} dx,$$

und unterwirft die Faltungsgleichung (2.1) ebenfalls einer FOURIER-Transformation, dann erhält man die von DUFFIEUX [1] zuerst in die Optik eingeführte Frequenzdarstellung der inkohärenten optischen Abbildung

$$(7.3) \quad \check{B}(\xi) = \check{O}(\xi) \mathcal{A}(\xi) .$$

Dabei ist $\mathcal{A}(\xi)$ die durch (6.1.) definierte Übertragungsfunktion des inkohärent abbildenden optischen Systems.

Wenden wir dieses Ergebnis auf die inkohärente Abbildungskette mit zwei Gliedern $\mathcal{A}_1(\xi)$ und $\mathcal{A}_2(\xi)$ an, dann gilt für die Übertragungsfunktion der Abbildungskette die bekannte Beziehung

$$(7.4) \quad \mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}_1(\xi) \mathcal{A}_2(\xi) .$$

Setzen wir die Momentendarstellungen dieser Übertragungsfunktionen

$$(7.5-1) \quad \mathcal{A}_1(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i)^{\nu} M_{\nu}^{(1)}}{\nu!} \xi^{\nu},$$

$$(7.5-2) \quad \mathcal{A}_2(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i)^{\nu} M_{\nu}^{(2)}}{\nu!} \xi^{\nu}$$

in (7.4) ein, so führt dies zu dem Ergebnis

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}(\xi) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i)^{\nu} M_{\nu}^{(1)}}{\nu!} \xi^{\nu} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-i)^{\kappa} M_{\kappa}^{(2)}}{\kappa!} \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left[\sum_{\nu=\sigma-\kappa} \frac{M_{\nu}^{(1)} M_{\kappa}^{(2)}}{\kappa! \nu!} \right] (-i)^{\sigma} \xi^{\sigma} \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(-i)^{\sigma}}{\sigma!} \left\{ \sum_{\nu=\sigma-\kappa} \frac{\sigma!}{\kappa! \nu!} M_{\nu}^{(1)} M_{\kappa}^{(2)} \right\} \xi^{\sigma}. \end{aligned}$$

Die Identifikation

$$(7.7) \quad M_{\sigma} = \sum_{\nu=0}^{\sigma} \frac{\sigma!}{\nu! (\sigma-\nu)!} M_{\sigma-\nu}^{(1)} M_{\nu}^{(2)}$$

ergibt die Bestimmungsgleichung für die resultierenden Intensitätsmomente.

Unter Ausnutzung der Normierungen (3.4) erhalten wir in expliziter Darstellung:

$$(7.8) \quad \begin{aligned} M_0 &= 1 \\ M_1 &= 0 \\ M_2 &= M_2^{(1)} + M_2^{(2)} \\ M_3 &= M_3^{(1)} + M_3^{(2)} \\ M_4 &= M_4^{(1)} + M_4^{(2)} + 6 M_2^{(1)} M_2^{(2)} \\ M_5 &= M_5^{(1)} + M_5^{(2)} + 10 [M_2^{(1)} M_3^{(2)} + M_3^{(1)} M_2^{(2)}] \\ M_6 &= M_6^{(1)} + M_6^{(2)} + 10 [M_2^{(1)} M_4^{(2)} + M_4^{(1)} M_2^{(2)}] + 15 M_3^{(1)} M_3^{(2)} \\ M_7 &= \dots \end{aligned}$$

In der Bestimmungsgleichung für das Intensitätsmoment 2-ter Ordnung erkennen wir das aus der Statistik bekannte Gesetz der Additivität der Varianzen wieder. E. W. MARCHAND [8] hat dieses Ergebnis direkt aus dem Faltungs-

integral in der Form

$$(7.9) \quad s^2 = s_1^2 + s_2^2$$

hergeleitet, wo s_1 , s_2 und s Streubreiten entsprechend (3.4-2) sind. Von KÄMMERER [9] wurden für das Minimalobjekt und die minimale Linienbreite analoge Formeln gefunden. Auch die von LUKOSZ [5] für den Frequenzbereich der "kontrastrichtigen Wiedergabe" hergeleitete Regel, daß das Quadrat der reziproken Linienzahl der Abbildungskette gleich der Summe aus den zum Quadrat erhobenen reziproken Linienzahlen der Abbildungsglieder ist, findet in der Additivität der Intensitätsmomente 2-ter Ordnung seine Begründung.

Darüber hinaus halten wir als Ergebnis fest, daß auch die Intensitätsmomente 3-ter Ordnung additiv zu kombinieren sind. Erst die Intensitätsmomente ab der 4-ten Ordnung enthalten gemischte Glieder. Damit sind auch die Gültigkeitsgrenzen der additiven Kombinationsregeln aufgezeigt.

8. Die Übertragungsmomente

Wir haben uns bisher ausschließlich mit den Eigenschaften der Intensitätsmomente befaßt. Wir wollen nun untersuchen, wie der Übertragungsfunktion Momente zuzuordnen sind.

Ganz analog definieren wir die Übertragungsmomente U_ν der Übertragungsfunktion durch

$$(8.1) \quad U_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^\nu \wedge(\xi) d\xi.$$

Die Konvergenz dieser Momentenintegrale läßt sich auch in den Fällen erzwingen, wo (8.1) nicht divergiert. Es führt wieder das von WOLTER [4] vorgeschlagene Limitierungsverfahren

$$(8.2) \quad U_\nu = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\alpha \xi^2\} (i\xi)^\nu \wedge(\xi) d\xi$$

zum Ziel.

Die Übertragungsmomente U_ν stellen einen Satz von Parametern dar, der für eine physikalisch eindeutige Beschreibung des Abbildungszustandes ausreichend ist.

Von der Messung her ist die Übertragungsfunktion durch Betrag und Phase oder durch Real- und Imaginäranteil gegeben und dies nur für positive Ortsfrequenzen ξ . Wir erweitern diese Größen formal auf negative Ortsfrequenzen durch die Festsetzungen

$$(8.2-1) \quad \Lambda^r(-\xi) = \Lambda^r(\xi),$$

$$(8.2-2) \quad \Lambda^i(-\xi) = -\Lambda^i(\xi)$$

und erhalten als komplexe Übertragungsfunktion

$$(8.3) \quad \Lambda(\xi) = \Lambda^r(\xi) + i \Lambda^i(\xi).$$

Ausgehend von dieser Darstellung erhalten wir für die geradzahigen Übertragungsmomente

$$(8.4) \quad U_{2x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^{2x} \left\{ \Lambda^r(\xi) + i \Lambda^i(\xi) \right\} d\xi \\ = \frac{(-1)^x}{\pi} \int_0^{+\infty} \xi^{2x} \Lambda^r(\xi) d\xi.$$

Für die ungeradzahigen Übertragungsmomente gilt entsprechend

$$(8.5) \quad U_{2x+1} = \frac{(-1)^{x+1}}{\pi} \int_0^{+\infty} \xi^{2x+1} \Lambda^i(\xi) d\xi.$$

9. Darstellung der Intensitätsfunktion durch Übertragungsmomente

Aus der Übertragungsfunktion $\Lambda(\xi)$ erhalten wir durch FOURIER-Transformation die Intensitätsfunktion

$$(9.1) \quad L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\xi) \exp \left\{ i x \xi \right\} d\xi.$$

Ersetzen wir die Exponentialfunktion durch ihre Potenzreihe, so führt das auf

$$(9.2) \quad L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\xi) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^x}{x!} (i\xi)^x d\xi \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^x}{x!} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^x \Lambda(\xi) d\xi = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{U_x}{x!} x^x.$$

Gliedweiser Vergleich mit der TAYLORentwicklung

$$(9.3) \quad L(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{L^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}$$

der Intensitätsfunktion liefert die zu (6.5) analoge Beziehung

$$(9.4) \quad U_{\nu} = L^{(\nu)}(0).$$

Wir halten auch hier als Ergebnis fest: Die Folge der Übertragungsmomente U_{ν} stellt eine Entwicklung der Intensitätsfunktion $L(x)$ um die Stelle $x = 0$ dar. Je mehr Übertragungsmomente zur Beschreibung herangezogen werden, desto größer ist der Abszissenbereich, für den gültige Aussagen über die Abbildungsqualität möglich sind.

Die Übertragungsmomente niedriger Ordnung beschreiben primär die Detailwiedergabe. Diese Feststellung steht in Übereinstimmung mit der bekannten Interpretation der relativen Gipfelhöhe (STREHL'sche Definitionshelligkeit beim Punktbild) als Korrelat zum Auflösungsvermögen.

10. Darstellung der Linienfunktion durch HERMITE'sche Funktionen

Die in der Praxis vorkommenden Linienfunktionen haben einen Verlauf, der - von Feinheiten abgesehen - der GAUSZ'schen Glockenkurve ähnelt. Dieser Sachverhalt legt für eine analytische Darstellung der Intensitätsfunktion einen Produktansatz nahe, derart, daß der eine Faktor aus einer Glockenkurve mit der Streubreite s und der andere Faktor aus einem Polynom bzw. einer Potenzreihe besteht. Für die rechnerische Durchführung sind drei Darstellungsformen möglich.

Als erste Darstellungsform der Linienfunktion $L(x)$ halten wir

$$(10.1) \quad L(x) = \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} \mathcal{H}_{\nu}\left(\frac{x}{s}\right)$$

fest. Dabei sind die normierten HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{H}_{\nu}(u)$ durch

$$(10.2) \quad \mathcal{H}_{\nu}(u) = p_{\nu} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} H_{\nu}(u)$$

definiert mit

$$(10.3) \quad p_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2^{\nu} \nu! \sqrt{\pi}}}$$

als Normierungskonstante und

$$(10.4) \quad H_0(u) = 1$$

$$H_1(u) = 2u$$

$$H_{n+1}(u) = 2u H_n(u) - 2n H_{n-1}(u)$$

als HERMITE'schen Polynomen. Die Orthogonalitätsbeziehung lautet

$$(10.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_\mu(u) \mathcal{H}_\nu(u) du = \delta_{\mu\nu}.$$

Für die Entwicklungskoeffizienten A_ν erhalten wir die Darstellung

$$(10.6) \quad A_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \mathcal{H}_\nu\left(\frac{x}{\xi}\right) dx.$$

In Fig. 8 sind die HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{H}_\nu(u)$ dargestellt.

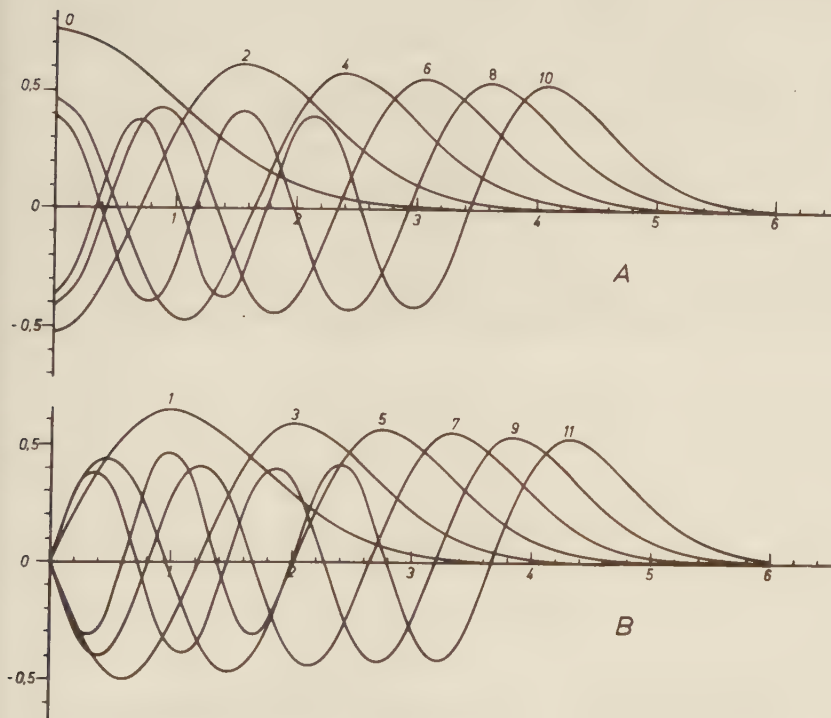


Fig. 8

Darstellung der HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{H}_\nu(u)$, in Teilbild A die geraden und in Teilbild B die ungeraden Funktionen.

Als zweite Darstellungsform der Linienfunktion $L(x)$ setzen wir

$$(10.7) \quad L(x) = \frac{1}{S} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} \mathcal{H}_{\nu} \left(\frac{x}{S} \right).$$

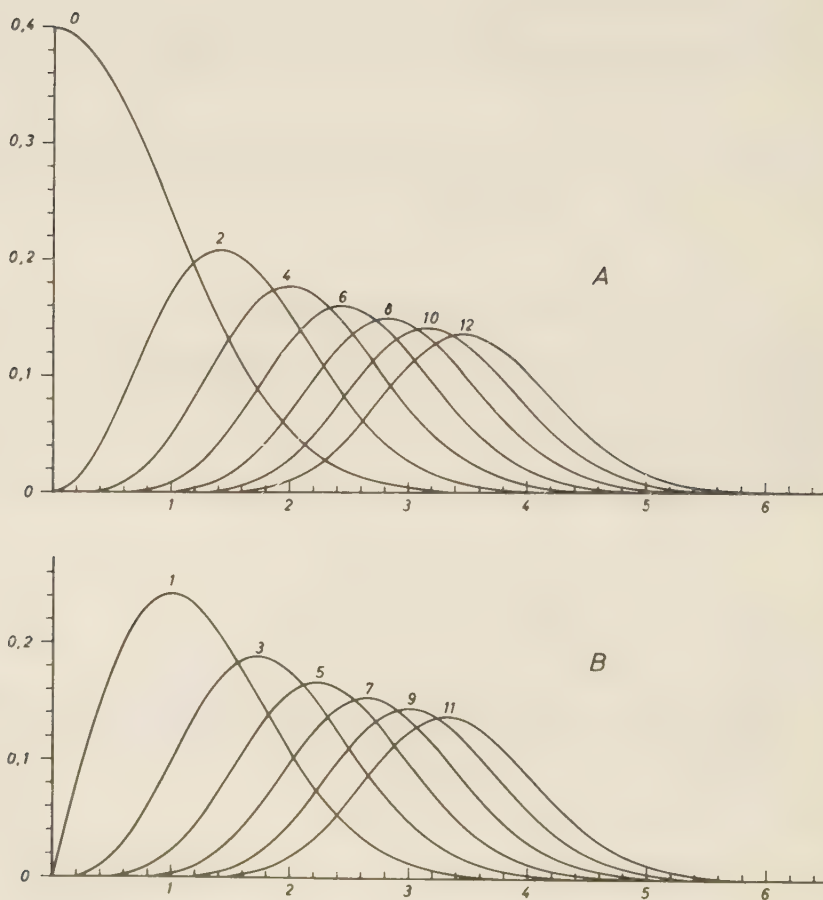


Fig. 9

Darstellung der HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{H}_{\nu}(u)$, in Teilbild A die geraden und in Teilbild B die ungeraden Funktionen.

Dabei sind die HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{H}_{p_v}(u)$ definiert durch

$$(10.8) \quad \mathcal{H}_{p_v}\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v!} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{s}\right)^2 \right\} \left(\frac{x}{s}\right)^v.$$

Wir benennen diese Funktionen ebenfalls nach HERMITE, weil sie die charakteristische GAUSZ'sche Glockenfunktion enthalten und weil ihre FOURIER-Transformierten auf die in (10.10) genannten HERMITE'schen Funktionen führen. Die Funktionen $\mathcal{H}_{p_v}(u)$ sind in Fig. 9 dargestellt.

Die Entwicklungskoeffizienten B_v lassen sich wegen der Nichtexistenz einer entsprechenden Orthogonalitätsbeziehung für $\mathcal{H}_{p_v}(u)$ formal nicht so einfach bestimmen. Ein gangbarer Weg ist die mittlere Approximation analog der Vorgehensweise von KULIK [10, 11]. Dieses Verfahren hat sogar den Vorzug, daß die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten B_v mit einer Rückfaltung gekoppelt werden kann, welche den Einfluß der endlichen Breiten von Objekt- und Abtastspalt zu eliminieren gestattet.

Als dritte und - wie wir feststellen werden - für unsere Zwecke übersichtlichste Darstellungsform der Linienfunktion $L(x)$ setzen wir

$$(10.9) \quad L(x) = \frac{1}{s} \sum_{v=0}^{\infty} C_v \mathcal{H}_{e_v}\left(\frac{x}{s}\right).$$

Die HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{H}_{e_v}(u)$ sind durch

$$(10.10) \quad \mathcal{H}_{e_v}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v!} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u^2 \right\} \mathcal{H}_{e_v}(u)$$

definiert; für die HERMITE'schen Polynome $\mathcal{H}_{e_v}(u)$ gilt

$$(10.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{e_0}(u) &= 1 \\ \mathcal{H}_{e_1}(u) &= u \\ \mathcal{H}_{e_{n+1}}(u) &= u \mathcal{H}_{e_n}(u) - n \mathcal{H}_{e_{n-1}}(u). \end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsbeziehung lautet in diesem Fall

$$(10.12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{e_\mu}(u) \mathcal{H}_{e_\nu}(u) du = \sqrt{v!} \delta_{\mu\nu}.$$

Das ergibt für die Entwicklungskoeffizienten C_v die Darstellung

$$(10.13) \quad C_v = \frac{1}{\sqrt{v!}} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \mathcal{H}_{e_v}\left(\frac{x}{s}\right) dx.$$

Die Funktionen $\mathcal{H}_{e_v}(u)$ sind in Fig. 10 dargestellt.

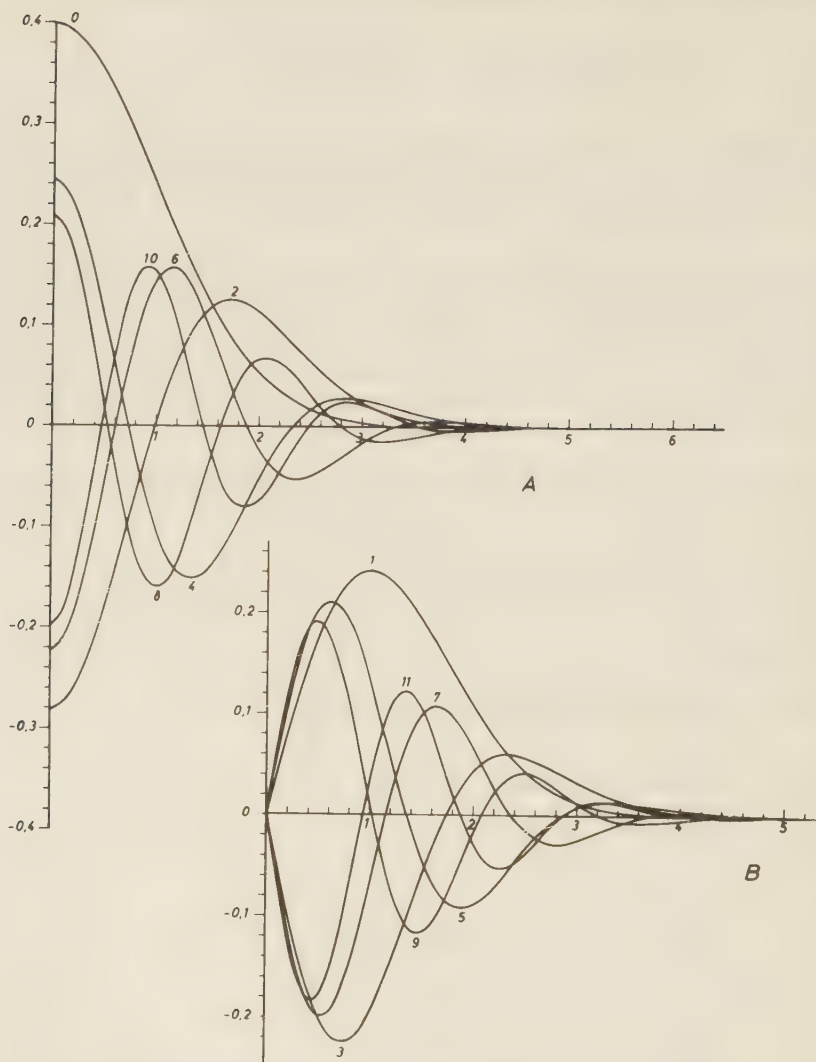


Fig. 10

Darstellung der HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{H}_\nu(u)$, in Teilbild A die geraden und in Teilbild B die ungeraden Funktionen.

In Tabelle 2 sind die Entwicklungskoeffizienten C_v der in den Fig. 5 und 6 wiedergegebenen Linienfunktionen dargestellt. Dabei stellen wir fest, daß die Konvergenz der Entwicklungskoeffizienten C_v für einige Beispiele brauchbar, für die Verwaschungsfunktion insbesondere aber sehr schlecht ist.

Tabelle 2: Numerische Werte der Entwicklungskoeffizienten C_v für die in Fig. 5 und 6 dargestellten Linienfunktionen für $v = 1, 2, \dots, 11$.

Nr.	Rechteckfunktion	Glockenfunktion	Verwaschungsfunktion	Funktion aus Parabelstücken	Dreiecksfunktion mit Schiefe		
					0,0	0,5	1,0
3	0	0	0	0	0	-0,17244	-0,25095
4	-0,24495	0	0,61237	-0,12248	-0,12247	-0,12247	-0,12247
5	0	0	0	0	0	0,16526	0,22133
6	0,25555	0	1,11803	0,07807	0,06389	0,08763	0,10648
7	0	0	0	0	0	-0,08925	-0,11955
8	-0,17928	0	4,70594	-0,02291	0,00896	-0,04434	-0,08665
9	0	0	0	0	0	0,01380	0,01610
10	0,08246	0	21,82190	-0,00802	-0,05154	0,02125	0,07901
11	0	0	0	0	0	0,03396	0,05418

Man kann jedoch ähnlich wie bei KULIK [10,11] zeigen, daß durch geeignete Wahl der Streubreite s , deren Quadrat wir bisher gemäß (3.4-2) dem Intensitätsmoment 2-ter Ordnung gleich gesetzt hatten, eine wesentliche Verbesserung der Konvergenz erreicht werden kann. Durch eine Minimumsforderung bezüglich der mittleren quadratischen Abweichung von den Istwerten läßt sich sogar eine optimale Streubreite $\tilde{s}$ finden, für welche die Konvergenz besonders gut ist. Diese Streubreite $\tilde{s}$ ist im allgemeinen von der in unseren Darstellungen benutzten verschieden.

Wenn man von den Übertragungsmomenten nach (8.1) bzw. der Darstellung (9.3) der Linienfunktion $L(x)$ ausgeht, ist man ohnehin gezwungen, die Streubreite s durch eine Minimalforderung zu bestimmen. Diese Aufgabe geht jedoch über den hier gesetzten Rahmen hinaus und wird an anderer Stelle behandelt werden. Die in dieser Untersuchung zu zeigenden Zusammenhänge können auch mit der Streubreite s dargestellt werden, ohne daß dadurch die Allgemeinheit der Ergebnisse eingeschränkt würde.

11. Darstellung der Übertragungsfunktion durch HERMITE'sche Funktionen

Durch die Ansätze (10.1), (10.7) und (10.9) ist es gelungen, die Linienfunktion $L(x)$ analytisch darzustellen. Es erhebt sich die Frage, ob ähnliche Darstellungen auch für die Übertragungsfunktion gefunden werden können. Das ist durch FOURIER-Transformation leicht zu erreichen.

Die FOURIER-Transformierte von (10.1) ist

$$(11.1) \quad \Lambda(\xi) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{s} \sum_{v=0}^{\infty} A_v \mathcal{H}_v \left(\frac{x}{s} \right) \right\} = \frac{1}{s} \sum_{v=0}^{\infty} A_v \mathcal{F} \left\{ \mathcal{H}_v \left(\frac{x}{s} \right) \right\}.$$

Wegen

$$(11.2) \quad f\left\{ \mathcal{K}_{Z_v} \left(\frac{x}{s} \right) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_{Z_v} \left(\frac{x}{s} \right) \exp \left[-i\xi x \right] dx \\ = \sqrt{2\pi} \, s (-i)^v \mathcal{K}_{Z_v} (s\xi)$$

erhalten wir als FOURIER-Transformierte der Linienfunktion $L(x)$

$$(11.3) \quad \Lambda(\xi) = \sqrt{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} A_v (-i)^v \mathcal{K}_{Z_v} (s\xi)$$

Anwendung der FOURIER-Transformation auf (10.7) ergibt

$$(11.4) \quad \Lambda(\xi) = f\left\{ \frac{1}{s} \sum_{v=0}^{\infty} B_v \mathcal{K}_{p_v} \left(\frac{x}{s} \right) \right\} = \frac{1}{s} \sum_{v=0}^{\infty} B_v f\left\{ \mathcal{K}_{p_v} \left(\frac{x}{s} \right) \right\} \\ = \sqrt{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} B_v (-i)^v \mathcal{K}_{e_v} (s\xi),$$

d.h. bei dieser Darstellung der Übertragungsfunktion sind die HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{K}_{p_v}(u)$ der Intensitätsfunktion durch die HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{K}_{e_v}(u)$ ersetzt.

Schließlich folgt durch Anwendung der FOURIER-Transformation auf (10.9)

$$(11.5) \quad \Lambda(\xi) = f\left\{ \frac{1}{s} \sum_{v=0}^{\infty} C_v \mathcal{K}_{e_v} \left(\frac{x}{s} \right) \right\} = \frac{1}{s} \sum_{v=0}^{\infty} C_v f\left\{ \mathcal{K}_{e_v} \left(\frac{x}{s} \right) \right\} \\ = \sqrt{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} C_v (-i)^v \mathcal{K}_{p_v} (s\xi).$$

Hier sehen wir, daß umgekehrt wie bei (11.4) die HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{K}_{e_v}(u)$ der Linienfunktion in der Übertragungsfunktion durch die HERMITE'schen Funktionen $\mathcal{K}_{p_v}(u)$ ersetzt sind.

Allgemein stellen wir fest: die Entwicklungskoeffizienten für jede der vorgeschlagenen Darstellungsarten sind für die Linienfunktion und die Übertragungsfunktion dieselben.

Ausgehend von einer experimentell ermittelten Übertragungsfunktion könnte man analog wie bei der Linienfunktion durch Anwendung von Orthogonalitätsrelationen die Entwicklungskoeffizienten A_v bzw. C_v bestimmen. Dieses Verfahren stößt jedoch auf Schwierigkeiten, wenn - wie meist üblich - die Übertragungsfunktion nur bis zu einer bestimmten Grenzfrequenz gemessen wurde.

12. Bestimmung der Intensitätsmomente aus den Entwicklungskoeffizienten

In Ziff. 3 hatten wir die reduzierten Intensitätsmomente m_v der Linienfunktion

$L(x)$ bestimmt. Jetzt wollen wir diese reduzierten Intensitätsmomente m_q aus den Entwicklungskoeffizienten herleiten. Diese Aufgabe ist für alle drei Arten von Entwicklungskoeffizienten zu lösen.

Ein Lösungsweg besteht darin, daß die Bestimmung der reduzierten Intensitätsmomente m_q auf die Bestimmung der Momente der HERMITE'schen Funktionen reduziert wird. Der andere Lösungsweg leitet sich aus der Beziehung (6.5) her, nach der das q -te Intensitätsmoment durch die q -te Ableitung der Übertragungsfunktion bei der Ortsfrequenz $\xi = 0$ darstellbar ist. Nachfolgend werden wir wahlweise beide Möglichkeiten anwenden.

Zunächst wollen wir den Zusammenhang der reduzierten Intensitätsmomente m_q mit den Entwicklungskoeffizienten A_ν herstellen. Es ist

$$(12.1) \quad m_q = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{S}\right)^q L(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{S}\right)^q \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \mathcal{H}_{Z\nu} \left(\frac{x}{S}\right) \right\} d\left(\frac{x}{S}\right) \\ = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{S}\right)^q \mathcal{H}_{Z\nu} \left(\frac{x}{S}\right) d\left(\frac{x}{S}\right) \right\} A_\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{q\nu} A_\nu$$

wo

$$(12.2) \quad \alpha_{q\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{S}\right)^q \mathcal{H}_{Z\nu} \left(\frac{x}{S}\right) d\left(\frac{x}{S}\right)$$

das q -te Moment der HERMITE'schen Funktion $\mathcal{H}_{Z\nu}(u)$ darstellt. Diese Momente lassen sich unter Ausnutzung der Ergebnisse von Beispiel 2 in einfacher Weise bestimmen.

Bei der Bestimmung der reduzierten Intensitätsmomente m_q aus den Entwicklungskoeffizienten B_ν gehen wir von den Ableitungen der Übertragungsfunktion $\Lambda(\xi)$ aus. Die erste Ableitung ist

$$(12.3) \quad \Lambda(\xi) = \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (-i)^\nu \mathcal{H}_e' (s\xi) \\ = \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (-i)^\nu \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu!}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \exp\left\{-\frac{1}{2}(s\xi)^2\right\} \mathcal{H}_e (s\xi) \right\} \\ = (-s) \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (-i)^\nu \frac{1}{\nu!} \left\{ \exp\left\{-\frac{1}{2}(s\xi)^2\right\} \mathcal{H}_{e,\nu+1}(s\xi) \right\}$$

Für die q -te Ableitung gilt dann

$$(12.4) \quad \Lambda^{(q)}(\xi) = (-s)^q \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (-i)^\nu \frac{1}{\nu!} \left\{ \exp\left\{-\frac{1}{2}(s\xi)^2\right\} \mathcal{H}_{e,\nu+q}(s\xi) \right\}.$$

Mit $\xi = 0$ erhalten wir

$$(12.5) \quad \Lambda^{(q)}(0) = (-s)^q \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} (-i)^{\nu} \frac{He_{\nu+q}(0)}{\sqrt{\nu!}}.$$

Für die reduzierten Intensitätsmomente m_q ergibt das

$$(12.6) \quad m_q = \frac{i^q \Lambda^{(q)}(0)}{s^q} \\ = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_{\nu}}{\sqrt{\nu!}} (-i)^{\nu+q} He_{\nu+q}(0) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{q\nu} B_{\nu}$$

d.h. die Entwicklungskoeffizienten werden durch lineare Transformation mit der Matrix

$$(12.7) \quad \beta_{q\nu} = \frac{B_{\nu}}{\sqrt{\nu!}} (-i)^{\nu+q} He_{\nu+q}(0)$$

in die reduzierten Intensitätsmomente m_q überführt. Auf eine numerische Auswertung verzichten wir auch hier.

Endlich gehen wir von den Entwicklungskoeffizienten C_{ν} aus und bilden die Ableitungen der Darstellung (11.3) der Übertragungsfunktion $\Lambda(\xi)$. Die erste Ableitung ist

$$(12.8*) \quad \Lambda'(\xi) = \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} (-i)^{\nu} \mathcal{R}p_{\nu}(s\xi) \\ = \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} (-i)^{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu!}} \frac{d}{d\xi} \left\{ \exp \left\{ -\frac{1}{2}(s\xi)^2 \right\} (s\xi)^{\nu} \right\}.$$

Mit der Abkürzung

$$(12.9) \quad \overset{*}{C}_{\nu}^{(0)} = \frac{C_{\nu}}{\sqrt{\nu!}}$$

und Ausführung der Differentiation läßt sich (12.8*) schreiben

$$(12.8) \quad \Lambda'(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{*}{C}_{\nu}^{(0)} s \exp \left\{ -\frac{1}{2}(s\xi)^2 \right\} \left[\nu (s\xi)^{\nu-1} - (s\xi)^{\nu+1} \right] \\ = (-is) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[(\nu+1) \overset{*}{C}_{\nu+1}^{(0)} + \overset{*}{C}_{\nu-1}^{(0)} \right] (-i)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(s\xi)^2 \right\} (s\xi)^{\nu} \\ = (-is) \sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{*}{C}_{\nu}^{(1)} (-i)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(s\xi)^2 \right\} (s\xi)^{\nu}.$$

Für die q -te Ableitung erhalten wir

$$(12.10) \quad \Lambda^{(q)}(\xi) = (-is)^q \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{C}_{\nu}^{*(q)} (-i)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (s\xi)^2 \right\} (s\xi)^{\nu}$$

Dabei sind die Koeffizienten $\tilde{C}_{\nu}$ der q -ten Ableitung aus den Koeffizienten der $(q-1)$ -ten Ableitung der Übertragungsfunktion $\Lambda(\xi)$ nach der Rekursionsformel

$$(12.11) \quad \tilde{C}_{\nu}^{*(q)} = (\nu+1) \tilde{C}_{\nu}^{*(q-1)} + \tilde{C}_{\nu+1}^{*(q-1)}$$

bestimmbar. Mit $\xi = 0$ entsteht

$$(12.12) \quad \Lambda_{(0)}^{(q)} = (-is)^q \tilde{C}_0^{*(q)}$$

Das ergibt die reduzierten Intensitätsmomente

$$(12.13) \quad m_q = \frac{\Lambda_{(0)}^{(q)}}{(-is)^q} = \tilde{C}_0^{*(q)}$$

Nach der Rekursionsformel (12.11) lassen sich die Größen $\tilde{C}_0^{*(q)}$ als Linearkombination der Größen $\tilde{C}_{\nu}^{*(0)}$ darstellen:

$$(12.14) \quad \tilde{C}_0^{*(q)} = \sum_{\nu=0}^q \gamma_{q\nu} \tilde{C}_{\nu}^{*(0)}$$

Einsetzen von (12.14) in die Gleichung (12.12) und Berücksichtigung von (12.8) ergibt

$$(12.15) \quad m_q = \sum_{\nu=0}^q \gamma_{q\nu} \tilde{C}_{\nu}^{*(0)} \\ = \sum_{\nu=0}^q \frac{\gamma_{q\nu}}{\sqrt{\nu!}} C_{\nu} \quad \sum_{\nu=0}^q \gamma_{q\nu} C_{\nu}$$

Die Dreiecksmatrix $\gamma_{q\nu}$ ist in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: Darstellung der Dreiecksmatrizen $\tilde{C}_{q\gamma}$ und $\tilde{\tilde{C}}_{q\gamma}$. Die Dreiecksmatrix $\tilde{C}_{q\gamma}$ transformiert die Entwicklungskoeffizienten C_q in die reduzierten Intensitätsmomente m_q ; die Matrixelemente sind in der Oberzeile der Tabelle dargestellt. Umgekehrt führt die Dreiecksmatrix $\tilde{\tilde{C}}_{q\gamma}$ die reduzierten Intensitätsmomente m_q in die Entwicklungskoeffizienten C_q über; diese Matrixelemente sind in der Unterzeile der Tabelle dargestellt.

	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
C_0	$\begin{smallmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,707107 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,612372 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,559017 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,522913 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,496078 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_1	$\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,224745 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,369306 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,479020 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,568738 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,645306 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_2	$\begin{smallmatrix} * \\ -0,707107 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,414214 \\ 0,707107 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,449490 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3,354102 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4,183375 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4,960784 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_3	$\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,224745 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,449490 \\ 0,408248 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5,477226 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8,874120 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 12,54990 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 16,45306 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_4	$\begin{smallmatrix} * \\ 0,612372 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,224745 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4,898980 \\ 0,204124 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 13,41641 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 25,10025 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 39,68627 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_5	$\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,369306 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10,95445 \\ 0,091267 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 35,49648 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 75,25940 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 131,6245 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_6	$\begin{smallmatrix} * \\ -0,559017 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,677051 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,559017 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 26,83282 \\ 0,037268 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 100,4010 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 238,1176 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_7	$\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,479020 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,479020 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,295804 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 70,99296 \\ 0,010086 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 301,1976 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 789,7468 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_8	$\begin{smallmatrix} * \\ 0,522913 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -2,091650 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,045895 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,139443 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 200,77984 \\ 0,004980 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 952,4705 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_9	$\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,568738 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,627495 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,059761 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 602,3952 \\ 0,001660 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3158,987 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_{10}	$\begin{smallmatrix} * \\ -0,496078 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,480392 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,653595 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,330719 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,024623 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1904,941 \\ 0,000525 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$
C_{11}	$\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,645306 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,742176 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,096871 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0,156696 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,008705 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6317,974 \\ 0,000158 \end{smallmatrix}$

Die Formeln (12.14) bzw. (12.15) geben das aus der Statistik bekannte Ergebnis wieder, daß die q ersten reduzierten Intensitätsmomente m_q eindeutig durch die q ersten Entwicklungskoeffizienten C_v bestimmt sind und umgekehrt. Dieses Ergebnis gilt nur für die Entwicklung (10.9) und nicht für die anderen Ansätze. Durch diese Eigenschaft ist die Entwicklung (10.9) ausgezeichnet.

Mit Hilfe der Dreiecksmatrix γ_{qv} sind wir also in der Lage, zu einer Linienfunktion $L(x)$, die durch die Streubreite s und die Entwicklungskoeffizienten C_v gegeben ist, die reduzierten und damit auch die nichtreduzierten Intensitätsmomente anzugeben.

13. Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten aus den Intensitätsmomenten

In Ziff. 12 wurde hergeleitet, wie aus vorgegebenen Entwicklungskoeffizienten die reduzierten Intensitätsmomente zu bestimmen sind. Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe lösen: aus vorgegebenen reduzierten Intensitätsmomenten sollen die Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden.

Ein möglicher Lösungsweg für diese Aufgabe wäre die Auflösung der Gleichungen (12.1), (12.6) bzw. (12.15) nach den zugehörigen Entwicklungskoeffizienten A_q , B_q bzw. C_q . Praktisch durchführbar ist dieser Lösungsweg jedoch nur für die Entwicklungskoeffizienten C_q .

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht in der Auswertung der Definitionsgleichungen (10.6) und (10.13) der Entwicklungskoeffizienten A_q bzw. C_q . Im ersten Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} (13.1) \quad A_q &= \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \mathcal{H}_q \left(\frac{x}{s} \right) dx \\ &= p_q \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{s} \right)^2 \right\} \mathcal{H}_q \left(\frac{x}{s} \right) dx. \end{aligned}$$

Einsetzen der Reihendarstellung der GAUSZ'schen Glockenkurve und ordnen nach gleichen Potenzen, liefert die gewünschte Darstellung

$$(13.2) \quad A_q = \sum_{v=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{qv} m_v,$$

wo die Matrix α_{qv} invers ist zur Matrix α_{vq} . Die numerische Darstellung der Matrixelemente $\tilde{\alpha}_{qv}$ wollen wir übergehen.

Die Darstellung der Entwicklungskoeffizienten C_q durch die reduzierten Intensitätsmomente m_v ist besonders einfach. Die HERMITE'schen Polynome $He_v(u)$ haben die Darstellung

$$(13.3) \quad He_q(u) = \sum_{v=0}^q \langle ep \rangle_{qv} u^v.$$

Durch Einsetzen in (10.13) folgt

$$\begin{aligned}
 (13.4) \quad C_q &= \frac{1}{\sqrt{q!}} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \sum_{\nu=0}^q \langle ep \rangle_{q\nu} \left(\frac{x}{s}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{q!}} \sum_{\nu=0}^q \langle ep \rangle_{q\nu} \frac{1}{s^\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu L(x) dx \\
 &= \sum_{\nu=0}^q \frac{\langle ep \rangle_{q\nu}}{\sqrt{q!}} \frac{M_\nu}{s^\nu} \equiv \sum_{\nu=0}^q \bar{\gamma}_{q\nu} m_\nu.
 \end{aligned}$$

Die Matrix $\bar{\gamma}_{q\nu}$ ist eine Dreiecksmatrix und invers zur Matrix $\gamma_{q\nu}$. Ihre numerischen Werte sind in Tabelle 3 dargestellt.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir zeigen, wie die Entwicklungskoeffizienten B_q aus den reduzierten Intensitätsmomenten m_ν gewonnen werden können. Da eine Formel für die direkte Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten B_q nicht existiert, gehen wir von der Darstellung (10.13) der Linienfunktion $L(x)$ aus.

In einem ersten Schritt der Ableitung ersetzen wir die Funktionen $He_\nu(u)$ durch die Funktionen $Hp_\nu(u)$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir aus den Entwicklungskoeffizienten C_q die Entwicklungskoeffizienten B_q . Es ist

$$\begin{aligned}
 (13.5) \quad L(x) &= \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \mathcal{H}e_\nu\left(\frac{x}{s}\right) \\
 &= \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{\sqrt{2\pi\nu!}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right\} \sum_{q=0}^{\nu} \langle ep \rangle_{\nu q} \left(\frac{x}{s}\right)^q \\
 &= \frac{1}{s} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \sqrt{2\pi q!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{\sqrt{2\pi\nu!}} \langle ep \rangle_{\nu q} \right\} \mathcal{H}p_q\left(\frac{x}{s}\right) \\
 &\equiv \frac{1}{s} \sum_{q=0}^{\infty} B_q \mathcal{H}p_q\left(\frac{x}{s}\right).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$(13.6) \quad B_q = \sqrt{2\pi q!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{\sqrt{2\pi\nu!}} \langle ep \rangle_{\nu q},$$

wo $\langle ep \rangle_{\nu q}$ das Koeffizientenschema nach (13.3) ist, nach welchem die Polynome $He_\nu(u)$ durch die Potenzen von u dargestellt werden.

Im zweiten Schritt ersetzen wir die Entwicklungskoeffizienten C_ν durch ihre Momentendarstellung (13.4) und erhalten

$$(13.7) \quad B_g = \sqrt{2\pi g!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\langle ep \rangle_{\nu g}}{\sqrt{2\pi \nu!}} \sum_{\mu=0}^g \bar{\gamma}_{\nu\mu} m_\mu$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sqrt{g!} \sum_{\nu=g}^{\infty} \bar{\gamma}_{\nu\mu} \frac{\langle ep \rangle_{\nu g}}{\sqrt{\nu!}} \right\} m_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{\beta}_{g\mu} m_\mu.$$

Somit erhalten wir für die Matrix $\bar{\beta}_{g\mu}$ die Darstellung

$$(13.8) \quad \bar{\beta}_{g\mu} = \sqrt{g!} \sum_{\nu=g}^{\infty} \bar{\gamma}_{\nu\mu} \frac{\langle ep \rangle_{\nu g}}{\sqrt{\nu!}}.$$

Auch die Matrix $\bar{\beta}_{g\mu}$ ist invers zur Matrix $\beta_{g\mu}$ nach (12.7). Die numerische Bestimmung der Matrixelemente wollen wir nicht durchführen.

Allgemein ist festzuhalten: Für jede Art der Entwicklungskoeffizienten existiert eine lineare Transformationsmatrix, welche die reduzierten Intensitätsmomente m_ν in die entsprechende Art Entwicklungskoeffizienten überführt. Die Transformationsmatrix für die Entwicklungskoeffizienten C_ν ist eine Dreiecksmatrix und daher vor den anderen Arten in der numerischen Anwendung ausgezeichnet.

14. Darstellung des Faltungsintegrals durch HERMITE'sche Funktion

Die Darstellung der Linienfunktion $L(x)$ durch HERMITE'sche Funktionen liefert eine numerisch günstige Möglichkeit, das Faltungsintegral (2.1) durch eine Reihe darzustellen.

Einsetzen der HERMITE'schen Darstellung (10.1) der Linienfunktion $L(x)$ in das Faltungsintegral (2.1) ergibt

$$(14.1) \quad B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x') L(x-x') dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} O(x') \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \mathcal{H}_{Z\nu} \left(\frac{x'-x}{S} \right) d \left(\frac{x'}{S} \right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} O(x') \mathcal{H}_{Z\nu} \left(\frac{x'-x}{S} \right) d \left(\frac{x'}{S} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu B_{Z\nu} \left(\frac{x}{S} \right)$$

Die Funktion

$$(14.2) \quad Bz_v\left(\frac{x}{s}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x') \mathcal{K}z_v\left(\frac{x'-x}{s}\right) d\left(\frac{x'}{s}\right)$$

nennen wir "Faltungsintegral zur Funktion $\mathcal{K}z_v(u)$ ".

Analog erhalten wir für die Darstellung (10.7)

$$(14.3) \quad B(x) = \sum_{v=0}^{\infty} B_v Bp_v\left(\frac{x}{s}\right)$$

mit

$$(14.4) \quad Bp_v\left(\frac{x}{s}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x') \mathcal{K}p_v\left(\frac{x-x'}{s}\right) d\left(\frac{x'}{s}\right)$$

und schließlich für die Darstellung (10.9)

$$(14.5) \quad B(x) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v Be_v\left(\frac{x}{s}\right)$$

mit

$$(14.6) \quad Be_v\left(\frac{x}{s}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x') \mathcal{K}e_v\left(\frac{x-x'}{s}\right) d\left(\frac{x'}{s}\right).$$

Damit ist gezeigt, daß die Bildfunktion als Überlagerung "standardisierter" Bildfunktionen dargestellt werden kann, welche die Abbildungseigenschaften des zu bewertenden Systems noch nicht enthalten.

Beispiel 6 Als Objektfunktion sei die HEAVISIDE'sche Sprungfunktion

$$(B 6.1) \quad O(x) = \eta(x) = \overset{*}{\eta}(x) - \frac{1}{2}$$

vorgegeben. Anwendung von (14.5) ergibt

$$\begin{aligned} (B 6.2) \quad Be_v\left(\frac{x}{s}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{*}{\eta}(x') \mathcal{K}e_v\left(\frac{x-x'}{s}\right) d\left(\frac{x'}{s}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathcal{K}e_v\left(\frac{x-x'}{s}\right) d\left(\frac{x'}{s}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x}{s}} \mathcal{K}e_v(u) du - \frac{1}{2} = -\mathcal{K}e_{v-1}\left(\frac{x}{s}\right) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Reihendarstellung der Kantenfunktion

$$(B\ 6.3) \quad B(x) = - \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \mathcal{H}e_{\nu-1} \left(\frac{x}{S} \right)$$

wo insbesondere

$$(B\ 6.4) \quad \mathcal{H}e_{-1} \left(\frac{x}{S} \right) = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{S}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} u^2 \right\} du + \frac{1}{2} = - \Phi \left(\frac{x}{S} \right)$$

bis auf das Vorzeichen mit der GAUSZ'schen Fehlerfunktion übereinstimmt.

15. Notwendigkeit einer Theorie der Bildbewertung

Bisher haben wir folgendes gelernt: Keine der in Teil I gegebenen Darstellungsformen des physikalischen Abbildungszustandes - sei es die Intensitäts- oder Übertragungsfunktion oder die Folge der Intensitäts- oder Übertragungsmomente oder die Folge der Entwicklungskoeffizienten einer der genannten HERMITE'schen Darstellungen - gestattet eine unmittelbare, in Zahlen ausdrückbare Bewertung der Abbildungsleistung eines optischen Systems. Dies trifft auch zu, wenn man eines der Momente als charakteristisch auswählt, z. B. das GAUSZ-Moment oder die relative Gipfelhöhe, wie es ja in der Tat vorgeschlagen wurde. Wir haben gesehen, daß gerade diese beiden Kriterien nur etwas über die absolute Größe der Linienfunktion aussagen, aber in keiner Weise die spezielle Form der Linienfunktion kennzeichnen oder gar bewerten.

Wir wollen daher, ausgehend von der LINFOOT'schen Untersuchung [2] und in Anlehnung an den Ansatz von FRANKE [3] eine Bewertungstheorie entwickeln, welche die Abbildungsqualität für beliebige Objektformen numerisch zu kennzeichnen gestattet. Wir setzen dabei die Kenntnis der Objekt- und Bildstruktur als bekannt bzw. die Bildstruktur aus der Objektstruktur nach dem Faltungsintegral (2.1) berechenbar voraus. Außerdem denken wir uns die Objektstruktur auf den Maßstab der Bildebene reduziert. Die Unterscheidung von Objekt- und Bildraum konzentriert sich dann nur auf die Abweichungen in den Intensitätsverteilungen. Bei idealer Abbildung müßte somit die bildseitige Intensitätsverteilung mit der objektseitigen identisch sein.

Für die Aufgabenstellung dieses Teils der Untersuchung interessiert also der Ähnlichkeitsvergleich von Objekt- und Bildstruktur, d.h. wir suchen nach Maßzahlen, welche die Ähnlichkeit beliebiger Objekt- und Bildstrukturen kennzeichnen. Dabei ist auch zu untersuchen, ob und wie die Ähnlichkeitsmaßzahlen mit bekannten Qualitätskriterien zusammenhängen.

Um die andere, nicht weniger interessante Fragestellung bei der Untersuchung des Abbildungsvorgangs, nämlich der Frage, wie bei Kenntnis der Linienfunktion $L(x)$ aus einer gemessenen Bildstruktur $J_B(x)$ auf die zugehörige Objektstruktur $J_O(x)$ rückgeschlossen werden kann, kümmern wir uns hier nicht. Diese Fragestellung läuft auf die Auflösung der Faltungsgleichung (2.1) hinaus, ist aber für unsere Aufgabenstellung nicht von Bedeutung.

Bei der nachfolgenden Herleitung der Bewertungsformel und der Kennzeichnungsgrößen gehen wir von der Objekt- und Bildfunktion aus. Die Herleitung könnte aber ebenso von der FOURIER-Darstellung oder Sampling-Darstellung dieser Funktionen ausgehen. Von jedem dieser Ausgangspunkte käme man zu den herzuleitenden Ergebnissen.

16. Herleitung der Bewertungsformel

Es hat sich herausgestellt, daß die zur Bewertung gelangenden Intensitätsverteilungen bezüglich ihrer mathematischen Behandlung nach in *linienartige*, *kantenartige* und *periodische* Intensitätsverteilungen einzuteilen sind. Dies ist in Fig. 11 dargestellt.

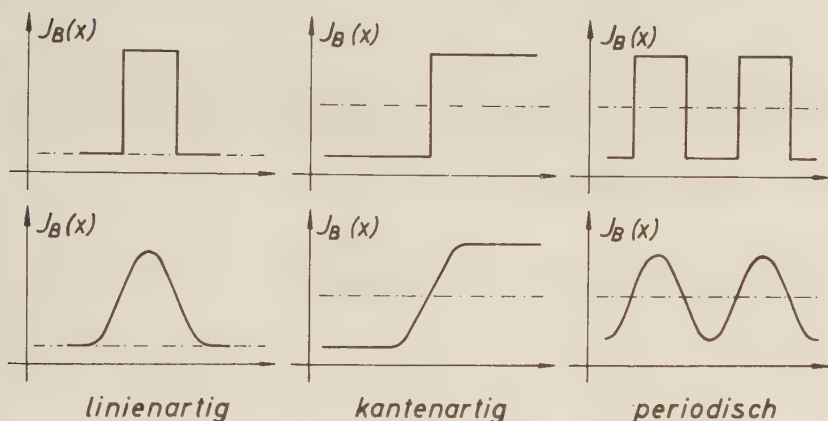


Fig. 11

Darstellung der drei möglichen Arten von Intensitätsstrukturen durch typische Repräsentanten. In der oberen Reihe ist jeweils die Intensitätsverteilung $J_O(x)$ der Objektstruktur dargestellt, in der unteren Reihe die Intensitätsverteilung $J_B(x)$ der Bildstruktur.

Die mathematische Beschreibung einer Objekt- bzw. Bildstruktur bezeichnen wir nachfolgend als Objektfunktion und als Bildfunktion. Diese müssen so normiert sein, daß die Fernabwerte übereinstimmen. Außerdem kann ein Gleichlichtanteil, den wir Pegelwert nennen wollen, abgespalten werden. Dieser Pegelwert ist für linien- und kantenartige Objektstrukturen durch

$$(16.1) \quad P = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} J_O(x) dx$$

gegeben, für periodische Objektstrukturen der Periodenlänge $2A$ durch

$$(16.2) \quad P = \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} J_O(x) dx .$$

Bei linearer Abbildung - die inkohärente Abbildung ist linear - braucht die Objektstruktur nur bis auf einen konstanten Amplitudenfaktor bekannt sein. Vergleichbarkeit von unterschiedlichen Objektstrukturen kann erreicht werden entweder durch Normierung auf gleiche Fläche oder durch Normierung auf gleiche Kantenhöhe. Im Grenzfall des Linienbildes ist nur noch Normierung auf gleiche Fläche, im Grenzfall des Kantenbildes nur noch Normierung auf gleiche Kantenhöhe möglich. Dies wird in den Ziff. 17 und 18 verdeutlicht werden. Allgemein definieren wir daher als "Liniennormierung"

$$(16.3) \quad H_L = Q \int_{-\infty}^{+\infty} |J_0(x) - P| dx,$$

wobei bei periodischen Strukturen die Periodenlänge als Integrationsintervall anzunehmen ist. Entsprechend definieren wir als "Kantennormierung"

$$(16.4) \quad H_K = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} (J_0(x) - P) \right| dx.$$

Dabei ist Q ein Faktor, über dessen Festsetzung wir von Fall zu Fall entscheiden werden.

Mit diesen Festlegungen läßt sich eine "Objektfunktion" $O(x)$ definieren durch

$$(16.5) \quad O(x) = \frac{J_0(x) - P}{H}$$

und eine "Bildfunktion" $B(x)$ durch

$$(16.6) \quad B(x) = \frac{J_B(x) - P}{H},$$

wobei die Normierungsgröße H Linien- oder Kantennormierung bedeuten kann.

Als Maß für die Ähnlichkeit von Objekt- und Bildstrukturen benutzen wir eine modifizierte Form der mittleren quadratischen Abweichung von Objekt- und Bildfunktion. Der Ansatz lautet

$$(16.7) \quad Q(k, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - KO(x-v)]^2 dx.$$

Die Modifikation der mittleren quadratischen Abweichung besteht in der Einführung der Anpassungsparameter k und v, die zunächst willkürlich sind. Sie sollen aber so bestimmt werden, das $Q(k, v)$ zum Minimum wird. Diesen

Minimalwert von $Q(k, v)$

$$(16.8) \quad D = \min_{k,v} Q(k,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - KO(x-v)]^2 dx$$

nennen wir "Defekt". Er ist ein Maß für die Abweichung des Bildes vom Objekt. Die durch die Minimumsforderung bestimmten Größen $v = V$ und $k = K$ nennen wir "Verschiebung" und "Kontrasttreue". Die Begründung für diese Namensgebung liefern wir später.

Der hier gegebene Ansatz ist mit $v = 0$ und etwas anderer Normierung schon von FRANKE [3] vorgeschlagen worden. Die zusätzliche Einführung des Anpassungsparameters v ermöglicht die Behandlung von Abbildungsvorgängen, denen eine nichtsymmetrische Intensitätsfunktion zugrunde liegt.

Durch Differentiation der Größe $Q(k, v)$ nach den Anpassungsparametern v und k erhalten wir

$$(16.9-1) \quad \frac{\partial Q(k,v)}{\partial v} = -2k \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \frac{\partial O(x-v)}{\partial v} dx + 2k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} O(x-v) \frac{\partial O(x-v)}{\partial v} dx,$$

$$(16.9-2) \quad \frac{\partial Q(k,v)}{\partial k} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) O(x-v) dx + 2k \int_{-\infty}^{+\infty} O(x-v) O(x-v) dx.$$

Mit den Abkürzungen

$$(16.10) \quad I_{00'} = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x-v) \frac{\partial O(x-v)}{\partial v} dx,$$

$$(16.11) \quad I_{B0'}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \frac{\partial O(x-v)}{\partial v} dx,$$

$$(16.12) \quad I_{00} = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x-v) O(x-v) dx,$$

$$(16.13) \quad I_{B0}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) O(x-v) dx$$

und wegen $\frac{\partial}{\partial v} Q(k, v) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial k} Q(k, v) = 0$ für das Minimum von $Q(k, v)$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$(16.14-1) \quad KI_{00'} - I_{B0'}(V) = 0$$

$$(16.14-2) \quad KI_{00} - I_{B0}(V) = 0.$$

Nun wollen wir dieses in K lineare, in V nichtlineare Gleichungssystem (16.14) nach den Parametern K und V lösen. I_{00} ist unabhängig von V ; daher ist $I_{00} = 0$ für beliebige Objektfunktionen. Für die Verschiebung V erhalten wir dann die Bestimmungsgleichung

$$(16.15) \quad I_{B0'}(V) = 0$$

mit der Lösung

$$(16.16) \quad V = \text{Nullstelle} \left\{ I_{B0'}(V) = 0 \right\}.$$

Die Lösung kann mehrdeutig sein.

Aus der Gleichung (16.14-2) folgt nach Einsetzen von V für die Kontrasttreue K die Lösung

$$(16.17) \quad K = \frac{I_{B0}(V)}{I_{00}}.$$

Durch Einsetzen von V und K in die Definitionsgleichung des Defekts (16.8), Anwendung der Abkürzungen (16.12) und (16.13) und Berücksichtigung der zusätzlichen Größe

$$(16.18) \quad I_{BB} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \cdot B(x) \, dx$$

können wir folgende Umformung vornehmen

$$(16.19) \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - KO(x - v)]^2 \, dx = I_{BB} - 2KI_{B0} + K^2 I_{00}.$$

Berücksichtigung von (16.17) ergibt für den Defekt die fundamentale Beziehung

$$(16.20) \quad D = I_{BB} - K^2 I_{OO}.$$

Definieren wir

$$(16.21) \quad S = \frac{I_{BB}}{I_{OO}},$$

dann nimmt (16.20) die Form

$$(16.22) \quad D = (S - K^2) I_{OO} = T I_{OO}$$

an, wo wir $S - K^2 = T$ gesetzt haben.

In Anlehnung an KORNDER [12] nennen wir die Größe I_{OO} Strukturinhalt des Objekts, die Größe I_{BB} Strukturinhalt des Bildes und die Größe S Strukturtreue der Abbildung. Wie man sieht, ist für die Bestimmung der Strukturtreue die Kenntnis der Verschiebung V nicht erforderlich.

Die Strukturtreue S ist mit dem LINFOOT'schen Strukturinhalt des Bildes identisch. Die Kontrasttreue K entspricht formal der LINFOOT'schen Korrelationsqualität, unterscheidet sich jedoch dadurch, daß die Kontrasttreue K von der Verschiebung V abhängig ist, die Korrelationsqualität dagegen nicht.

Um zu einer Deutung der hier eingeführten Größen zu kommen, wollen wir sie für möglichst unterschiedliche, in der Testpraxis vorkommende, eindimensionale Testfiguren bestimmen. Dabei werden wir die Bildfunktion aus der Objektfunktion durch Faltung oder lineare Superposition gewinnen.

17. Bewertung der Linientest-Abbildung

Beim Linientest wird ein sehr enger Spalt (im Grenzfall mit der Spaltweite 0, aber der Leuchtdichte ∞) abgebildet. Mathematisch wird die Objektfunktion dargestellt durch die DIRAC'sche δ -Funktion

$$(17.1) \quad O(x) = \delta(x)$$

und damit die Bildfunktion durch

$$(17.2) \quad B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x') L(x - x') dx = L(x).$$

Die Größen (16.11) bis (16.13) und (16.18) nehmen die folgenden Werte an:

$$(17.3) \quad I_{B0'}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \delta'(x-v) dx = L'(v),$$

$$(17.4) \quad I_{00} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(x-v) dx \rightarrow \infty,$$

$$(17.5) \quad I_{B0}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \delta(x-v) dx = L(v),$$

$$(17.6) \quad I_{BB} = \int_{-\infty}^{+\infty} L^2(x) dx$$

Aus (17.3) folgt für die Verschiebung

$$(17.7) \quad V_L = \text{Nullstelle} \left\{ L'(v) = 0 \right\}$$

aus (17.4) und (17.5) für die Kontrasttreue

$$(17.8) \quad K = \frac{L(v)}{\infty} = 0$$

und aus (17.4) und (17.6) für die Strukturtreue

$$(17.9) \quad S = \frac{I_{BB}}{\infty} = 0$$

Bei Anwendung der Beziehung (16.21) erhalten wir schließlich wegen $K = 0$ für den Defekt

$$(17.10) \quad D_L = \int_{-\infty}^{+\infty} L^2(x) dx$$

Den Defekt der Linientest-Abbildung nennen wir "Liniendefekt".

Beispiel 7 Als Linienfunktion $L(x)$ sei der Rechteckspalt nach Fig. 5 A mit der Darstellung (B 1.1) vorgegeben.

Mit der Objektfunktion $O(x) = \delta(x)$ und der Bildfunktion $B(x) = L(x)$ erhalten wir nach (17.3)

$$(B 7.1) \quad L'(v) = \begin{cases} \pm \infty & \text{für } x = \mp a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hieraus lässt sich die Verschiebung V_L nicht bestimmen. Da die Linienfunktion (B 1.1) symmetrisch ist, gilt jedoch

$$(B 7.2) \quad V_L = 0.$$

Für den Liniendefekt erhalten wir

$$(B 7.3) \quad D_L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2a} \right) dx = \frac{1}{2a}$$

Beispiel 8 In diesem Beispiel behandeln wir die GAUSZ'sche Glockenkurve nach Fig. 5 B mit der Darstellung (B 2.1). Als Bedingungsgleichung für die Verschiebung gilt

$$(B 8.1) \quad L'(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{s} \right)^2 \right\} \left(\frac{v}{s} \right) = 0$$

mit der Verschiebung

$$(B 8.2) \quad V_L = 0$$

als Lösung. Für den Liniendefekt erhalten wir

$$(B 8.3) \quad D_L = \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{x}{s} \right)^2 \right\} d \left(\frac{x}{s} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} s} = \frac{0,18209}{s}$$

Beispiel 9 Wir gehen von den Dreieckspalten nach Fig. 6 mit der Darstellung (B 5.1) aus. Gemäß der Bedienungsgleichung (17.3) haben wir $L(x)$ zu differenzieren

$$(B 9.1) \quad L'(v) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq -a \\ \frac{2}{(a+b)a} & -a \leq x \leq 0 \\ -\frac{2}{(a+b)b} & 0 < x \leq +b \\ 0 & +b < x \leq +\infty \end{cases} \quad \text{für}$$

Diese Funktion $L'(v)$ springt an der Stelle $v = 0$ von einem positiven auf einen negativen Wert, d. h. an der Stelle $v = 0$ liegt eine Nullstelle vor. Nun ist die Schwerpunktslage t nach (B 5.5-1) Bezugspunkt für die Verschiebung, für die wir somit

$$(B 9.2) \quad V_L = t = \frac{a-b}{3}$$

erhalten. Der Liniendefekt ergibt sich zu

$$(B 9.3) \quad D_L = \left(\frac{2}{a+b}\right)^2 \left\{ \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 dx + \int_0^b \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx \right\} = \frac{4}{3(a+b)}$$

Er ist erwartungsgemäß unabhängig von der Verschiebung V_L .

18. Bewertung der Kantentest-Abbildung

Beim Kantentest wird eine Schneide abgebildet. Die dieser Schneide zugeordnete Objektfunktion wird durch die HEAVISIDE'sche Sprungfunktion

$$(18.1) \quad O(x) = \eta(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\infty < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

beschrieben. Für die Bildfunktion erhalten wir durch Faltung

$$(18.2) \quad \begin{aligned} B(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x') L(x-x') dx' = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} L(u) du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x L(u) du \\ &= -\frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^x L(u) du + \int_x^{+\infty} L(u) du \right] + \int_{-\infty}^x L(u) du \equiv K(x) \end{aligned}$$

Die Größen (16.11) bis (16.13) und (16.18) nehmen im Fall der Kantentest-Abbildung die Werte

$$(18.3) \quad I_{B0'}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) \delta(x-v) dx = K(v),$$

$$(18.4) \quad I_{00} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} \eta(x-v) \eta(x-v) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{4} = \infty$$

$$(18.5) \quad I_{B0}(v) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} K(x) \eta(x-v) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A}{4} + \varepsilon \right\} = \infty$$

$$(18.6) \quad I_{BB} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} K(x) K(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A}{4} + \vartheta \right\} = \infty$$

an, wo ϵ und ϑ feste Werte sind. Aus (18.3) folgt für die Verschiebung

$$(18.7) \quad V_K = \text{Nullstelle } \{ K(V) = 0 \}$$

Für die Kontrasttreue erhalten wir aus (18.4) und (18.5) durch Grenzübergang

$$(18.8) \quad K = \frac{\lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A + \epsilon}{4} \right\}}{\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{4}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{4\epsilon}{A} \right\} = 1$$

d.h. der Kantentest wird unabhängig von der speziellen Kantenstruktur mit der Kontrasttreue $K = 1$ abgebildet. Dieses Ergebnis entspricht unmittelbar der Anschauung und der elementaren Kontrastdefinition. Analog ergeben (18.4) und (18.6) durch Grenzübergang die Strukturtreue

$$(18.9) \quad S = \frac{\lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A + \vartheta}{4} \right\}}{\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{4}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{4\vartheta}{A} \right\} = 1,$$

die ebenfalls unabhängig von der speziellen Kantenstruktur ist. Schließlich erhalten wir für den Defekt, allerdings unter Anwendung der Definitionsgleichung (16.8)

$$(18.10) \quad D_K = \int_{-\infty}^{+\infty} [K(x) - \eta(x-v)]^2 dx.$$

Für die numerische Rechnung hat sich folgende Zerlegung des Integrals bewährt

$$(18.11) \quad D_K = \int_{-\infty}^{V_K} \left[K(x) + \frac{1}{2} \right]^2 dx + \int_{V_K}^{+\infty} \left[K(x) - \frac{1}{2} \right]^2 dx \equiv D_+(V_K) + D_-(V_K).$$

Den Defekt bei der Kantentest-Abbildung nennen wir "Kantendefekt".

Beispiel 10 Nach (18.2) erhalten wir aus der Linienfunktion (B 1.1) des Rechteckspalts die Kantenfunktion

$$(B\ 10.1) \quad K(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\infty < x \leq -a \\ \frac{x}{2a} & -a \leq x \leq +a \\ +\frac{1}{2} & +a \leq x < +\infty \end{cases} \quad \text{für}$$

die in Fig. 12 A dargestellt ist. Die Bedingungsgleichung für die Verschiebung lautet in unserem Fall

$$(B\ 10.2) \quad K(V) = \frac{V}{2a} = 0$$

mit

$$(B\ 10.3) \quad V_K = 0$$

als Lösung. Für den Kantendefekt erhalten wir dann nach (18.11)

$$(B\ 10.4) \quad D_K = \int_{-a}^0 \left[\frac{x}{2a} + \frac{1}{2} \right]^2 dx + \int_0^{+a} \left[\frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right]^2 dx = \frac{a}{6}.$$

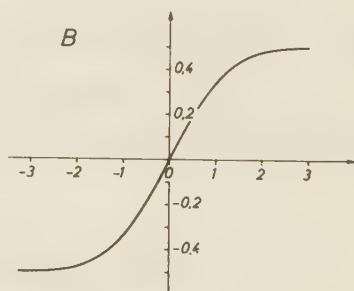
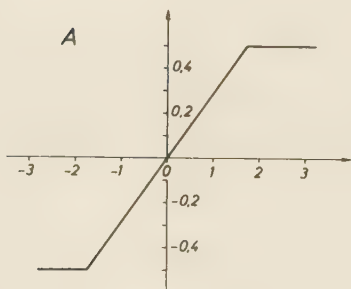


Fig. 12

Darstellung analytisch definierter Kantenfunktionen: A der Rechteckfunktion und B der GAUSZ'schen Glockenfunktion zugeordnete Kantenfunktion.

Da beim Kantenobjekt, unabhängig von der speziellen Struktur der Kante, der Kontrast $K = 1$ ist, der Kantendefekt also nur von dem Verschiebungsparameter v abhängig ist, wollen wir diese Abhängigkeit an diesem besonders einfachen Beispiel numerisch zeigen und in Fig. 13 darstellen. Wir bestimmen die Hilfsfunktionen $D_+(v)$ $D_-(v)$; diese sind

$$(B\ 10.5-1) \quad D_+(v) = \begin{cases} 0 & -\infty < v < -a \\ \frac{a}{4} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{v}{a} \right)^3 + \left(\frac{v}{a} \right)^2 + \left(\frac{v}{a} \right) + \frac{1}{3} \right] & \text{für } -a \leq v \leq +a \\ a \left[\left(\frac{v}{a} \right) - \frac{1}{3} \right] & +a \leq v < +\infty \end{cases}$$

$$(B\ 10.5-2) \quad D_-(v) = \begin{cases} a \left[- \left(\frac{v}{a} \right) - \frac{1}{3} \right] & -\infty < v \leq -a \\ \frac{a}{4} \left[- \frac{1}{3} \left(\frac{v}{a} \right)^3 + \left(\frac{v}{a} \right)^2 - \left(\frac{v}{a} \right) + \frac{1}{3} \right] & \text{für } -a \leq v \leq +a \\ 0 & +a \leq v < +\infty \end{cases}$$

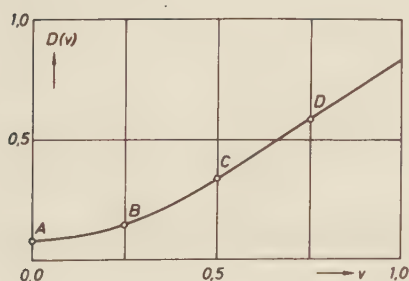
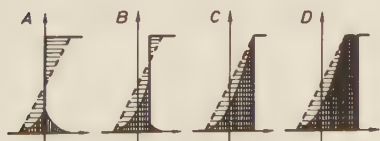


Fig. 13

Abhängigkeit der Defektgröße $D(v)$ vom Verschiebungsparameter v . Die waagrechte Schraffur zeigt die Abweichung von Kantenobjekt (—) und Kantenbild (----), die senkrechte Schraffur die Defektgröße D im Flächenmaß für die Punkte A, B, C und D.



Der Kantendefekt in Abhängigkeit von v entsteht als Summe der beiden Hilfsfunktionen (B 9.5)

$$(B 10.6) \quad D_K(v) = \begin{cases} a \left[-\left(\frac{v}{a}\right) - \frac{1}{3} \right] & -\infty < v \leq -a, \\ \frac{a}{2} \left[\left(\frac{v}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} \right] & \text{für } -a \leq v \leq +a, \\ a \left[\left(\frac{v}{a}\right) - \frac{1}{3} \right] & +a \leq v < +\infty \end{cases}$$

Durch Einsetzen der Verschiebung $V_K = 0$ bestätigen wir das oben erhaltene Ergebnis.

Beispiel 11 Als Kantenfunktion der GAUSZ'schen Glockenkurve (B 2.1) erhalten wir bei Anwendung von (18.2) die Fehlerfunktion

$$(B 11.1) \quad K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right\} dx - \frac{1}{2} \equiv \Phi\left(\frac{x}{s}\right)$$

die in Fig. 12 B dargestellt ist. Die Bedingungsgleichung für die Verschiebung lautet jetzt

$$(B 11.2) \quad K(V) = \Phi\left(\frac{V}{s}\right) = 0$$

und hat die Lösung

$$(B 11.3) \quad V_K = 0$$

Bei der Berechnung des Kantendefekts erhalten wir für die Hilfsfunktionen $D_+(v)$ und $D_-(v)$

$$(B 11.4-1) \quad D_+(v) = \int_{-\infty}^v \left[\Phi\left(\frac{x}{s}\right) + \frac{1}{2} \right]^2 dx = s \int_{-\infty}^{\frac{v}{s}} \left[\Phi(u) + \frac{1}{2} \right]^2 du \equiv s \Psi\left(\frac{v}{s}\right),$$

$$(B 11.4-2) \quad D_-(v) = \int_v^{+\infty} \left[\Phi\left(\frac{x}{s}\right) - \frac{1}{2} \right]^2 dx = s \int_{\frac{v}{s}}^{+\infty} \left[\Phi(-u) - \frac{1}{2} \right]^2 du \\ = s \int_{-\infty}^{-\frac{v}{s}} \left[\Phi(u) + \frac{1}{2} \right]^2 du \equiv s \Psi\left(-\frac{v}{s}\right).$$

Durch mehrmalige Anwendung der partiellen Integration läßt sich das Integral $\Psi(u)$ geschlossen auswerten. Mit $V_K = 0$ erhalten wir dann

$$(B 11.5) \quad D_K = 2s \Psi(0) = 0,3375 s.$$

Beispiel 12 Die Kantenfunktionen, die nach (18.2) aus den Dreieck-Linienfunktion (B 5.1) entstehen und in den Fig. 14 A, B und C dargestellt sind, lassen sich durch

$$(B 12.1) \quad K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -\infty < x \leq -a \\ \frac{1}{a+b} \left[\frac{a-b}{2} + 2x + \frac{x^2}{a} \right] & -a \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{a+b} \left[\frac{a-b}{2} + 2x - \frac{x^2}{b} \right] & 0 \leq x \leq +b \\ +\frac{1}{2} & +b \leq x < +\infty \end{cases} \quad \text{für}$$

darstellen, wobei der Koordinatenursprung wie bei der Linienfunktion (B 5.1) durch den Gipfelwert der Linienfunktion festgelegt ist.

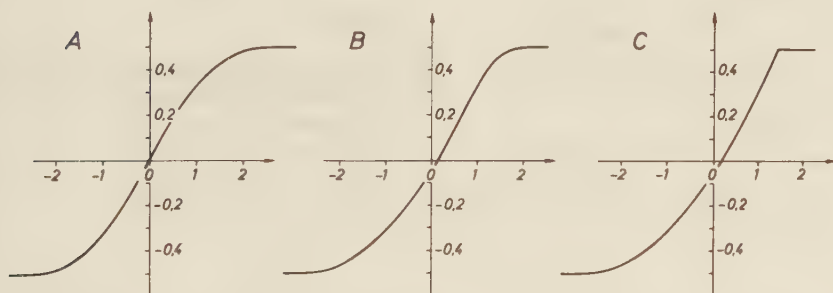


Fig. 14 Kantenfunktionen, die den Dreiecksfunktionen gemäß Fig. 6 A bis C zugeordnet sind.

Um zur Verschiebung V_K zu kommen, genügt es, den Fall $a \geq b$ zu betrachten. Die Bedingungsgleichung im hier gewählten Koordinatensystem lautet

$$(B 12.2) \quad \frac{x^2}{a} + 2x + \frac{a-b}{2} = 0$$

und hat die Lösung

$$(B 12.3) \quad x = \sqrt{\frac{a(a+b)}{2}} - a.$$

Durch Subtraktion der Schwerpunktslage t folgt für die Verschiebung

$$(B 12.4) \quad V_K = \sqrt{\frac{a(a+b)}{2}} - \frac{b+2a}{3}.$$

Für den Kantendefekt erhalten wir in Abhängigkeit von den Größen a und b , wobei $a \geq b$ ist:

$$(B 12.5) \quad D_K = \frac{b}{5} \left(\frac{b}{a+b} \right)^2 + a \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 \left\{ \frac{1}{5} + \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{V_K}{a} \right) + 2 \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right) \right] \left(\frac{V_K}{a} \right)^2 + \frac{2}{3} \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right) \right] \left(\frac{V_K}{a} \right)^3 \right\}.$$

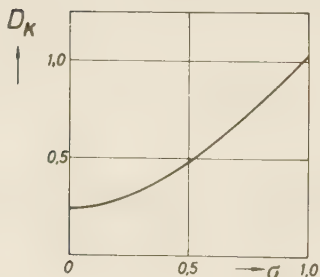
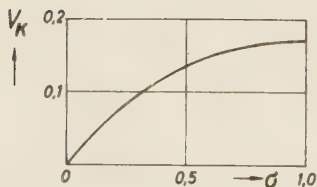


Fig. 15

Darstellung der Kantenverschiebung V_K und des Kantendefekts D_K in Abhängigkeit von der Schiefe σ der Dreiecks-Kantenfunktion.

In Fig. 15 ist dies dargestellt. Je unsymmetrischer die Linienfunktion ist, desto größer sind die Verschiebung V_K und der Kantendefekt D_K , d.h. ein Unsymmetriefehler verschlechtert das Kantenbild. Der Liniendefekt dagegen ändert sich nicht.

19. Bewertung der Gittertest-Abbildung

Unter Gittertesten verstehen wir periodische Tests, deren Gittersteg eine bestimmte Struktur aufweist. Bekanntlich läßt sich die Objektfunktion $O(x)$ eines Gittertests durch die FOURIER-Reihe

$$(19.1) \quad O(x) = \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi nx}{e} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{e} \right]$$

analytisch darstellen. Dieser Objektfunktion wird durch Faltung mit der Linienfunktion $L(x)$ die periodische Bildfunktion

$$(19.2) \quad B(x) = \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a'_n \cos \frac{2\pi nx}{e} + b'_n \sin \frac{2\pi nx}{e} \right]$$

zugeordnet. Zwischen den FOURIER-Koeffizienten a'_n, b'_n der Bildfunktion und den FOURIER-Koeffizienten a_n, b_n der Objektfunktion bestehen die Bestimmungsgleichungen

$$(19.3-1) \quad a'_n = a_n C\left(\frac{n}{e}\right) - b_n S\left(\frac{n}{e}\right),$$

$$(19.3-2) \quad b'_n = a_n S\left(\frac{n}{e}\right) + b_n C\left(\frac{n}{e}\right).$$

Dabei sind die Größen

$$(19.4-1) \quad C\left(\frac{n}{e}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \cos \frac{2\pi nx}{e} dx = \mathcal{L}_r\left(\frac{n}{e}\right),$$

$$(19.4-2) \quad S\left(\frac{n}{e}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \sin \frac{2\pi nx}{e} dx = \mathcal{L}_i\left(\frac{n}{e}\right)$$

der Real- und Imaginäranteil der Übertragungsfunktion $\mathcal{L}\left(\frac{n}{e}\right)$ an den Stellen

$$(19.5) \quad \frac{n}{e} = 2\pi \frac{\eta}{e}.$$

Als wichtiges Ergebnis halten wir fest, daß für die Beschreibung der Abbildung periodischer Teststrukturen die Übertragungsfunktion das geeignete Mittel ist.

Um nachfolgend den Vergleich von Objekt- und Bildstrukturen durchführen zu können, benötigen wir die Größen (16.10) bis (16.13) und (16.18). Für die Bestimmung dieser Größen ist die Kenntnis der Ableitung der Objektfunktion nach dem Verschiebungsparameter v erforderlich. Diese Ableitung hat den Wert

$$(19.6) \quad \frac{\partial O(x-v)}{\partial v} = \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{e} \left[a_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} - b_n \cos \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right]$$

Für die Größe I_{00} , erhalten wir

$$(19.7) \quad \begin{aligned} I_{00'} &= \int_0^e \left\{ \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n(x-v)}{e} + b_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{e} \left[a_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} - b_n \cos \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right] \right\} dx \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^e \frac{2\pi n}{e} \left[a_n \cos \frac{2\pi n(x-v)}{e} - b_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right] \\ &\quad \left[a_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} - b_n \cos \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right] dx = 0 \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß die im Index gemischten Glieder wegen der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen verschwinden. Hiermit ist auch explizit bewiesen, daß die Größe I_{00} , für beliebige Gitterteste verschwindet.

Analog ergibt sich für die Größe I_{B0} , (v)

$$(19.8) \quad \begin{aligned} I_{B0'}(v) &= \int_0^e \left\{ \frac{1}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \left[a'_m \cos \frac{2\pi mx}{e} + b'_m \sin \frac{2\pi mx}{e} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{e} \left[a_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} - b_n \cos \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right] \right\} dx \\ &= \frac{1}{2H^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{e} [a_n^2 + b_n^2] \left\{ S\left(\frac{n}{e}\right) \cos \frac{2\pi nv}{e} - C\left(\frac{n}{e}\right) \sin \frac{2\pi nv}{e} \right\} . \end{aligned}$$

Der Strukturinhalt I_{00} des Gitterobjekts wird

$$(19.9) \quad I_{00} = \int_0^e \left\{ \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n(x-v)}{e} + b_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right] \right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{2H^2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] .$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion $I_{B0}(v)$ von Bildfunktion und Objektfunktion wird

$$(19.10) \quad I_{B0}(v) = \int_0^e \left\{ \frac{1}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \left[a'_m \cos \frac{2\pi mx}{e} + b'_m \sin \frac{2\pi mx}{e} \right] \right.$$

$$\left. \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi nx}{e} + b_n \sin \frac{2\pi n(x-v)}{e} \right] \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2H^2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \left\{ C\left(\frac{n}{e}\right) \cos \frac{2\pi nv}{e} + S\left(\frac{n}{e}\right) \sin \frac{2\pi nv}{e} \right\} .$$

Schließlich bekommen wir für den Strukturinhalt I_{BB} des Gitterbildes

$$(19.11) \quad I_{BB} = \int_0^e \left\{ \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a'_n \cos \frac{2\pi nx}{e} + b'_n \sin \frac{2\pi nx}{e} \right] \right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{2H^2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \left\{ C^2\left(\frac{n}{e}\right) + S^2\left(\frac{n}{e}\right) \right\} .$$

Jetzt können wir die Verschiebung V , die Kontrasttreue K , die Strukturtreue S und den von der Normierung abhängigen Defekt D bestimmen. Aus (19.8) erhalten wir nach (16.16) für die Verschiebung V die Lösung

$$(19.12) \quad V = \text{Nullstelle} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2) \left[S\left(\frac{n}{e}\right) \cos \frac{2\pi nv}{e} - C\left(\frac{n}{e}\right) \sin \frac{2\pi nv}{e} \right] \right\}$$

Die Bestimmung der Nullstellen gelingt im allgemeinen nur auf iterativem Wege und stellt numerisch eine nicht immer ganz einfache Aufgabe dar. Für die Kontrasttreue K entsteht bei Anwendung von (16.17)

$$(19.13) \quad K = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \left\{ C\left(\frac{n}{e}\right) \cos \frac{2\pi nV}{e} + S\left(\frac{n}{e}\right) \sin \frac{2\pi nV}{e} \right\}}{\sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]} .$$

und für die Strukturtreue bei Anwendung von (16.20)

$$(19.14) \quad S = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \left\{ C^2\left(\frac{n}{e}\right) + S^2\left(\frac{n}{e}\right) \right\}}{\sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]} .$$

Die Größen Verschiebung, Kontrasttreue und Strukturtreue sind von der speziellen Wahl der Normierung der Objektfunktion unabhängig. Für den Defekt erhalten wir nach (16.21) den von der Normierung abhängigen Ausdruck

$$(19.15) \quad D = \frac{1}{2H^2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \left\{ \left[C^2\left(\frac{n}{e}\right) + S^2\left(\frac{n}{e}\right) \right] - K^2 \right\} .$$

Beispiel 13 Wir wollen diese Ergebnisse auf das reine Cosinus-Gitter nach Fig. 16 spezialisieren. Als Objektfunktion haben wir, in dem man in (19.12) alle a_n und b_n außer a_1 Null setzt,

$$(B 13.1) \quad O(x) = \frac{A}{N} \cos \frac{2\pi x}{e}$$

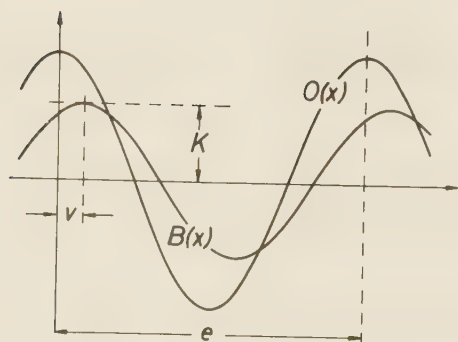


Fig. 16

Darstellung des Cosinus-Gitters als Objekt- und Bildfunktion. Eingetragen sind die Periodenlänge e , die Verschiebung V und die Kontrasttreue K .

Die Linien- und Kantennormierungen sind, wenn man $Q = 1$ setzt

$$(B 13.2-1) \quad N_L = \frac{2}{\pi} eA,$$

$$(B 13.2-2) \quad N_K = 4A.$$

Beim Cosinus-Gitter können weitgehende Folgerungen gezogen werden, ohne daß über die Linienfunktion bzw. die dieser entsprechenden Übertragungsfunktion besondere Annahmen zu machen sind. Für die Bildfunktion erhalten wir

$$(B 13.3) \quad B(x) = \frac{A}{N} \left\{ C\left(\frac{1}{e}\right) \cos \frac{2\pi x}{e} + S\left(\frac{1}{e}\right) \sin \frac{2\pi x}{e} \right\},$$

für die Verschiebung

$$(B 13.4) \quad v = \frac{e}{2\pi} \arctan \frac{S\left(\frac{1}{e}\right)}{C\left(\frac{1}{e}\right)} \equiv \frac{e}{2\pi} \Phi\left(\frac{1}{e}\right),$$

für die Kontrasttreue

$$(B 13.5) \quad K = C\left(\frac{1}{e}\right) \cos \Phi\left(\frac{1}{e}\right) + S\left(\frac{1}{e}\right) \sin \Phi\left(\frac{1}{e}\right) \equiv T\left(\frac{1}{e}\right)$$

für die Strukturtreue

$$(B 13.6) \quad S = C^2\left(\frac{1}{e}\right) + S^2\left(\frac{1}{e}\right) \equiv T^2\left(\frac{1}{e}\right)$$

und für den Defekt

$$(B 13.7) \quad D = (S - K^2) I_{00} = I_{BB} - K^2 I_{00} = 0$$

Der Defekt verschwindet und ist daher unabhängig von der Normierung; dies bedeutet, daß ein Cosinus-Objekt in ein Cosinus-Objekt abgebildet wird. Aus dem Verschwinden des Defekts folgt ferner die Beziehung

$$(B 13.8) \quad S = K^2$$

ein Ergebnis, das unter der Annahme symmetrischer Linienfunktionen bereits von KORNDER [12] erhalten wurde.

20. Bewertung der Mirentest-Abbildung

In der Testpraxis haben sich die Rechteck-Miren als Testobjekte besonders stark eingebürgert. Der einfachen Sprechweise wegen wollen wir nachfolgend nur noch von Mirentesten sprechen; wir meinen dann immer Rechteck-Mirenteste. In der Praxis werden ferner Positiv- und Negativ-Mirenteste unterschieden. Bei den Positiv-Mirentesten stehen dunkle Miren auf hellem Felde, bei den Negativ-Mirentesten helle Streifen auf dunklem Feld. Für die mathematische Beschreibung ist dieser Unterschied nicht von Bedeutung.

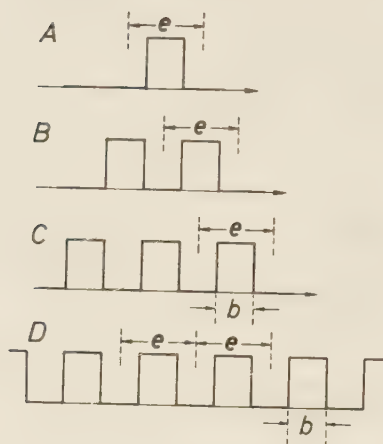


Fig. 17

Schematische Darstellung einiger Mirenteste: A Spalt (1-fach-Mire), B COBB-Test (2-fach-Mire), C 3-fach-Mire und D Rechteckgitter. Mit e ist die Ortssequenz bzw. Gitterperiode und mit b die Mirenbreite bezeichnet.

In Fig. 17 sind die Objektfunktionen einiger Mirenteste dargestellt, ohne daß auf eine bestimmte Normierung Wert gelegt ist. Ein Mirentest ist zu kennzeichnen durch

1. die Mirenzahl N
2. die Ortssequenz e und
3. die Mirenbreite b .

Das Verhältnis von Mirenbreite b und Ortssequenz e nennen wir relative Mirenbreite

$$(20.1) \quad c = \frac{b}{e}.$$

Zum Vergleich ist in Fig. 17 auch ein Rechteck-Gitter der Periodenlänge e und der Stegbreite b dargestellt.

Für den Spalt ist diese Bezeichnungsweise recht umständlich; man erreicht damit aber, daß er nicht als Sonderfall behandelt werden muß.

Die Objektfunktion der N-fach-Mire kann durch

$$(20.2) \quad O(x) = \frac{A}{H} \sum_{n=1}^N \left\{ \eta \left(x - \left[n - \frac{N+1+c}{2} \right] e \right) - \eta \left(x - \left[n - \frac{N+1-c}{2} \right] e \right) \right\}$$

dargestellt werden. Hierbei ist $\eta(x)$ die HEAVISIDE'sche Sprungfunktion gemäß (18.1), A ein Amplitudenfaktor und H eine Normierungskonstante. Die Bildfunktion der N-fach-Mire geht aus der Objektfunktion hervor, in dem man $\eta(x)$ durch die Kantenfunktion K(x) ersetzt. Wir erhalten

$$(20.3) \quad B(x) = \frac{A}{H} \sum_{n=1}^N \left\{ K \left(x - \left[n - \frac{N+1+c}{2} \right] e \right) - K \left(x - \left[n - \frac{N+1-c}{2} \right] e \right) \right\}.$$

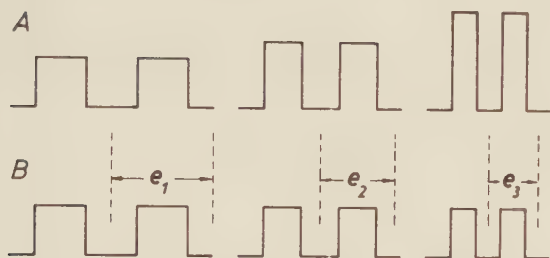


Fig. 18

A Linien- und B
Kantennormierung
des COBB-Tests
für drei verschie-
dene Ortssequenzen
 e_1 , e_2 und e_3 .

In Fig. 18 sind für den COBB-Test die Linien- und Kantennormierung dargestellt. Die Liniennormierung reduziert pro Mire auf Flächeninhalt 1 wie beim Liniertest

$$(20.4) \quad H_L = Ab,$$

die Kantennormierung ebenfalls pro Mire auf Kantenhöhe 1 wie beim Kantentest

$$(20.5) \quad H_K = 2A,$$

d.h. der Parameter Q wurde $1/N$ gesetzt. Die N-fach-Mire hat den Flächeninhalt N bzw. die Kantenhöhe N. Durch diese Festsetzung können Mirenteste direkt mit Gittertesten verglichen werden.

Für den Vergleich von Objekt und Bildfunktionen benötigen wir wieder die Größen (16.10) bis (16.13) und (16.18). Zu ihrer Herleitung ist die Kenntnis der Ableitung der Objektfunktion $O(x)$ nach dem Verschiebungsparameter erforderlich.

$$(20.6) \quad \frac{\partial O(x-v)}{\partial v} = -\frac{A}{H} \sum_{n=1}^N \left\{ \delta(x-v - [n \frac{N+1+c}{2}]) e - \delta(x-v - [n \frac{N+1-c}{2}]) e \right\}.$$

Um die nachfolgende Rechnung übersichtlich gestalten zu können, führen wir für $O(x)$, $B(x)$ und $\frac{\partial}{\partial v} O(x-v)$ die folgende Kurzschreibweise ein

$$(20.2*) \quad O(x) = \frac{A}{H} \sum_{n=1}^N \left\{ \eta(n, +c) - \eta(n, -c) \right\},$$

$$(20.3*) \quad B(x) = \frac{A}{H} \sum_{n=1}^N \left\{ K(n, +c) - K(n, -c) \right\},$$

$$(20.6*) \quad \frac{\partial O(x-v)}{\partial v} = -\frac{A}{H} \sum_{n=1}^N \left\{ \delta(n, +c) - \delta(n, -c) \right\}.$$

Die Größe I_{00} , verschwindet bekanntlich. Dies läßt sich auch explizit leicht zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} (20.7) \quad I_{00}' &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \left\{ \eta(n, +c) - \eta(n, -c) \right\} \sum_{m=1}^N \left\{ \delta(m, +c) - \delta(m, -c) \right\} dx \\ &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, +c) \delta(m, +c) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, +c) \delta(m, -c) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, -c) \delta(m, +c) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, -c) \delta(m, -c) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \text{sign}[m-n] - \text{sign}[m-n+c] \right. \\ &\quad \left. - \text{sign}[m-n-c] + \text{sign}[m-n] \right\} = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Dabei kann die Bestimmung der Integrale auf folgende

Weise geschehen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, +c) \delta(m, +c) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x - [m - \frac{N+1+c}{2}]e^{-v} + [m-n]e) \delta(x - [m - \frac{N+1+c}{2}]e^{-v}) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u + [m-n]e) \delta(u) du = \eta([m-n]e) = \text{sign } [m-n] \frac{1}{2}$$

und analog die anderen.

Nun wollen wir die Größe $I_{B0}(v)$ bestimmen, die wir ja für die Berechnung der Verschiebung brauchen. Es ist

$$\begin{aligned} (20.8) \quad I_{B0}(v) &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^N \left\{ K(n, +c) - K(n, -c) \right\} \sum_{m=1}^N \left\{ \delta(m, +c) - \delta(m, -c) \right\} dx \\ &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, +c) \delta(m, +c) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, +c) \delta(m, -c) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, -c) \delta(m, +c) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, -c) \delta(m, -c) dx \right\} \\ &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ K(v + [m-n]e) - K(v + [m-n+c]e) \right. \\ &\quad \left. - K(v + [m-n-c]e) + K(v + [m-n]e) \right\}. \end{aligned}$$

Die im letzten Schritt erforderlichen Integrationen sind wie folgt durchzuführen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, +c) \delta(m, +c) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - [m - \frac{N+1+c}{2}]e^{-v} + v + [m-n]e) \delta(x - [m - \frac{N+1+c}{2}]e^{-v}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(u + v + [m-n]e) \delta(u) du = K(v + [m-n]e) \end{aligned}$$

und analog die anderen. Anwendung der Bestimmungsgleichung (16.15) ergibt für die Verschiebung

$$(20.9) \quad V = \text{Nullstelle} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left[2K(V + [m-n]e) - K(V + [m-n+c]e) - K(V + [m-n-c]e) \right] = 0 \right\}$$

Die Bestimmung der Nullstellen kann durch Iteration erfolgen. Dabei existieren bei der numerischen Durchführung der Iteration zwei Schwierigkeiten, einmal die Vorgabe eines geeigneten Ausgangswertes von V , zum anderen die mögliche Existenz mehrerer Nullstellen.

Der Strukturinhalt I_{00} des Mirenobjekts kann leicht ausgerechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} (20.10) \quad I_{00} &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \left\{ \eta(n, +c) - \eta(n, -c) \right\} \sum_{m=1}^N \left\{ \eta(m, +c) - \eta(m, -c) \right\} dx \\ &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, +c) \eta(m, +c) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, +c) \eta(m, -c) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, -c) \eta(m, +c) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(n, -c) \eta(m, -c) dx \right\} \\ &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - \eta(n, +c) \eta(m, +c) \right] dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - \eta(n, +c) \eta(m, -c) \right] dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - \eta(n, -c) \eta(m, +c) \right] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - \eta(n, -c) \eta(m, -c) \right] dx \right\} \\ &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 Nb. \end{aligned}$$

Die Integranden der Integrale haben zwischen einer unteren und oberen Grenze den Wert $\frac{1}{2}$, sonst den Wert 0. Aufsummierung ergibt den gesuchten Wert für I_{00} .

Die Kreuzkorrelationsfunktion $I_{B0}(v)$ zwischen Bild- und Objektfunktion erhalten wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 (20.11) \quad I_{B0}(v) &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \left\{ K(n, +c) - K(n, -c) \right\} \sum_{m=1}^N \left\{ \eta(m, +c) - \eta(m, -c) \right\} dx \\
 &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, +c) \eta(m, +c) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, +c) \eta(m, -c) dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, -c) \eta(m, +c) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, -c) \eta(m, -c) dx \right\} \\
 &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K(n, +c) + \frac{1}{2} \right] \left[\eta(m, +c) + \frac{1}{2} \right] dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K(n, +c) + \frac{1}{2} \right] \left[\eta(m, -c) + \frac{1}{2} \right] dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K(n, -c) - \frac{1}{2} \right] \left[\eta(m, -c) + \frac{1}{2} \right] dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K(n, -c) + \frac{1}{2} \right] \left[\eta(m, -c) + \frac{1}{2} \right] dx \right\} \\
 &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \pi(v + [m-n]e) - \pi(v + [m-n+c]e) \right. \\
 &\quad \left. - \pi(v + [m-n-c]e) + \pi(v + [m-n]e) \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Auswertung der Integrale erfolgte dabei auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[K(n, +c) + \frac{1}{2} \right] \left[\eta(m, +c) + \frac{1}{2} \right] dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K(n+v-)m-n \left[e + \frac{1}{2} \right] \right] \left[\eta(n) + \frac{1}{2} \right] dx \\
 &= \int_{v+[m-n]e}^{+\infty} \left[K(w) + \frac{1}{2} \right] dw \equiv \pi(+\infty) - \pi(v + [m-n]e)
 \end{aligned}$$

und analog für die anderen Integrale. Die Funktion

$$(20.12) \quad \pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(u) + \frac{1}{2} \right] du$$

ist bis auf ein additives, lineares Glied gleich dem Integral über die Kantenfunktion $K(x)$; wir nennen diese Funktion "Kantenintegral".

Unter Berücksichtigung von $v = V$ erhalten wir nach (16.17) für die Kontrasttreue

$$(20.13) \quad K = \frac{1}{Nb} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \pi(v + [m-n+c]e) + \pi(v + [m-n-c]e) - 2\pi(v + [m-n]e) \right\}$$

Schließlich ist auch noch der Strukturinhalt I_{BB} des Mirenbildes zu bestimmen:

$$\begin{aligned} (20.14) \quad I_{BB} &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \left\{ K(n, +c) - K(n, -c) \right\} \sum_{m=1}^N \left\{ K(m, +c) - K(m, -c) \right\} dx \\ &= \left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, +c) K(m, +c) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, +c) K(m, -c) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, -c) K(m, +c) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} K(n, -c) K(m, -c) dx \right\} \\ &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(n, +c) K(m, +c) \right] dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(n, +c) K(m, -c) \right] dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(n, -c) K(m, +c) \right] dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(n, -c) K(m, -c) \right] dx \right\} \\ &= -\left(\frac{A}{H}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \mathcal{C}([m-n]e) - \mathcal{C}([m-n+c]e) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{C}([m-n-c]e) + \mathcal{C}([m-n]e) \right\}. \end{aligned}$$

Die Auswertung der Integrale geht dabei folgendermaßen vor sich

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(n, +c) K(m, +c) \right] dx \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(u + [m - u]e) K(u) \right] du = \sigma([m - n]e) \end{aligned}$$

und analog für die anderen Integrale. Die Funktion

$$(20.15) \quad \sigma(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(x + \alpha) K(x) \right] dx$$

stellt eine modifizierte Form der Autokorrelationsfunktion der Kantenfunktion $K(x)$ dar; wir nennen sie "Kantenkorrelationsfunktion". Die Kantenkorrelationsfunktion ist eine symmetrische Funktion; denn es ist

$$\begin{aligned} (20.16) \quad \sigma(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(x + \alpha) K(x) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} - K(x) K(x - \alpha) \right] dx = \sigma(-\alpha). \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir nach (16.20) für die Strukturtreue die Beziehung

$$(20.17) \quad S = \frac{1}{Nb} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sigma([m - n + c]e) + \sigma([m - n - c]e) - 2\sigma([m - n]e) \right\}.$$

Wir fassen zusammen: Bei der Bewertung der Abbildung von Mirentesten hat man von der Kantenfunktion $K(x)$ auszugehen. Ihre Kenntnis ist für die Bestimmung der Verschiebung V ausreichend. Für die Berechnung der Kontrasttreue K ist die Kenntnis des Kantenintegrals $\pi(x)$ und für die Berechnung der Strukturtreue S die Kenntnis der Kantenkorrelationsfunktion $\sigma(\alpha)$ erforderlich. Die gesamte übrige Rechenarbeit besteht im Aufsuchen von Nullstellen und dem Aufaddieren von Funktionswerten für wohlbestimmte Argumentswerte. Die Größen Verschiebung, Kontrasttreue und Strukturtreue sind von der speziellen Normierung unabhängig.

Für die numerische Behandlung der Bewertung der Abbildung von Mirentesten stellt die Kantenfunktion den sachgemäßen Ausgangspunkt dar.

Beispiel 14

Wir gehen aus von der Rechteck-Linienfunktion (B 1.1) und untersuchen rechnerisch, wie die mit dieser Rechteck-Linienfunktion gefalteten Spaltteste zu bewerten sind. Für COBB-Teste und 3-fach-Mirenteste werden die Ergebnisse nur grafisch mitgeteilt.

Aus der Linienfunktion (B 1.1) entsteht nach (18.2) die Kantenfunktion (B10.1) und nach (20.12) erhalten wir für das Kantenintegral

$$(B\ 14.1) \quad \pi(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq -a, \\ \frac{1}{4a} (x+a)^2 & \text{für } -a \leq x \leq +a, \\ x & +a \leq x < +\infty, \end{cases}$$

das in Fig. 19 dargestellt ist.

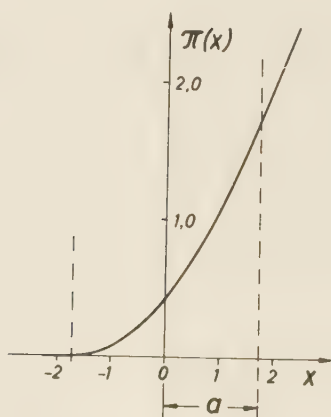


Fig. 19

Kantenintegral der Rechteck-Linienfunktion nach Fig. 5 A.

Für die Bestimmung der Kantenkorrelationsfunktion nach (20.15) nehmen wir $c = 1/2$ an und erhalten dann für die Ortssequenz $e = 2b$. Um nachfolgend eine einfachere Schreibweise zu haben, setzen wir außerdem $b = 2r$. In Fig. 20 ist der Aufbau der Funktion

$$(B\ 14.2) \quad \varphi(x) = \frac{1}{4} - K(x+r) K(x-r)$$

veranschaulicht.

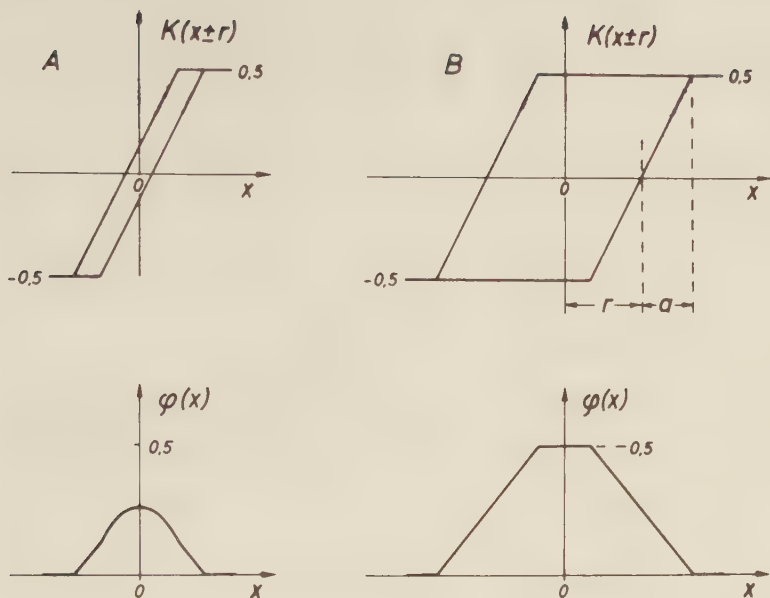


Fig. 20 Aufbau der Hilfsfunktion $\varphi(x)$. In Teilbild A ist der Fall $r \leq a$ und in Teilbild B der Fall $r \geq a$ dargestellt.

Dabei ist folgende Fallunterscheidung zu machen :

Fall $r \leq a$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(2r) &= \int_{-(a+r)}^{-(a-r)} \left[\frac{1}{4} - \frac{x+r}{4a} \right] dx + \int_{-(a-r)}^{+(a-r)} \left[\frac{1}{4} - \frac{x^2-r^2}{4a^2} \right] dx \\ &\quad + \int_{+(a-r)}^{+(a+r)} \left[\frac{1}{4} - \frac{x-r}{4a} \right] dx \end{aligned}$$

Fall $r \geq a$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(2r) &= \int_{-(r+a)}^{-(r-a)} \left[\frac{1}{4} - \frac{x+r}{4a} \right] dx + \int_{-(r-a)}^{+(r-a)} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] dx \\ &\quad + \int_{+(r-a)}^{+(r+a)} \left[\frac{1}{4} - \frac{x-r}{4a} \right] dx \end{aligned}$$

Nach Auswertung der Integrale entsteht

$$(B\ 14.3) \quad \sigma(2r) = \begin{cases} \frac{a}{3} + r \left(\frac{r}{a}\right) \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right)\right] & \text{für } 0 \leq r \leq a, \\ r & a \leq r < +\infty \end{cases}$$

Diese Kantenkorrelationsfunktion der Rechteck-Linienfunktion ist in Fig. 21 dargestellt.

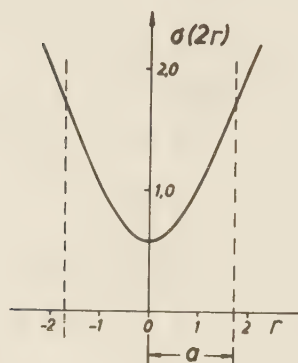


Fig. 21

Kantenkorrelationsfunktion $\sigma(2r)$ als Funktion des Ortssequenzparameters r ; die Ortssequenz ist $e = 4r$.

Wir wollen diese Ergebnisse auf den Spalttest anwenden. Bei symmetrischer Linienfunktion ist stets

$$(B\ 14.4) \quad V = 0.$$

Für die Kontrasttreue erhalten wir

$$(B\ 14.5^*) \quad K(r) = \frac{1}{2r} \left\{ \pi(2r) + \pi(-2r) - 2\pi(0) \right\}.$$

Fallunterscheidung:

	$0 \leq r \leq \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} \leq r < +\infty$
$\pi(2r)$	$\frac{1}{4a} (2r + a)^2$	$2r$
$\pi(-2r)$	$\frac{1}{4a} (-2r + a)^2$	0
$\pi(0)$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4}$

Einsetzen in (B 14.5*) führt zu

$$(B\ 14.5) \quad K(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right) & \text{für } 0 \leq r \leq \frac{a}{2}, \\ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{a}\right) & \frac{a}{2} \leq r < +\infty \end{cases}$$

Analog erhalten wir für die Strukturtreue

$$(B\ 14.6*) \quad S(r) = \frac{1}{2r} \left\{ \sigma(2r) + \sigma(-2r) - 2\sigma(0) \right\}.$$

Fallunterscheidung:

	$0 \leq r \leq a$	$a \leq r < +\infty$
$\sigma(2r)$	$\frac{a}{3} + r \left(\frac{r}{a}\right) \left 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right) \right $	r
$\sigma(-2r)$	$\frac{a}{3} + r \left(\frac{r}{a}\right) \left 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right) \right $	r
$\sigma(0)$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{3}$

Einsetzen in (B 14.6*) ergibt

$$(B\ 14.6) \quad S(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right) \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right) \right] & \text{für } 0 \leq r \leq a, \\ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{r}\right) & a \leq r < +\infty \end{cases}$$

Die in (16.22) enthaltene Differenzgröße T erhält in unserem Beispiel die Werte

$$(B 14.7) \quad T(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a} \right) \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{a} \right) \right] & 0 \leq r \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right) - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^2 & \text{für } \frac{a}{2} \leq r \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right) \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r} \right) \right] & a \leq r < +\infty \end{cases}$$

Sie verschwindet für die Abszissenwerte 0 und ∞ . In Fig. 22 sind die Kontrasttreue K , die Strukturtreue S und die Differenzgröße T für den Spalttest dargestellt.

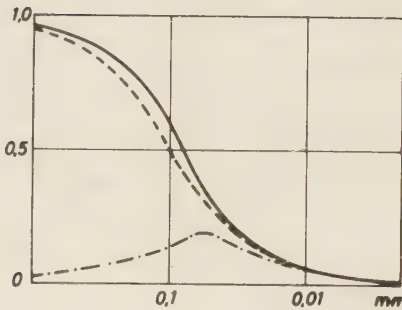


Fig. 22

Darstellung der Kontrasttreue K (—), der Strukturtreue S (---) und der Differenzgröße T (-.-.-) als Funktion der Ortssequenz $e = 4r$ für die Faltung eines Spalttestes mit einer Rechteck-Linienfunktion nach (B 1.1) mit $a = 0,04$ mm. Die Abszissenskala ist logarithmisch abgestuft.

Die Defektgrößen sind von der Art der Normierung abhängig. Mit der Liniennormierung (20.4) erhalten wir für den Liniendefekt des Spalttests

$$(B 14.8) \quad D_L(r) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{a} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{2a} & 0 \leq r \leq \frac{a}{2}, \\ \frac{1}{2e} \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right) - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] & \text{für } \frac{a}{2} \leq r \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right) \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r} \right) \right] & a \leq r < +\infty \end{cases}$$

Für die Ortssequenz 0 erhalten wir als Grenzwert den Defekt der Linienfunktion, für die Ortssequenz ∞ verschwindet der Liniendefekt. Führen wir gemäß (20.5) Kantennormierung ein, so erhalten wir für den Kanten-

$$(B\ 14.9) \quad D_K(r) = \begin{cases} \frac{r}{2} \left(\frac{r}{a} \right) \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{a} \right) \right] & 0 \leq r \leq \frac{a}{2}, \\ \frac{e}{2} \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right) - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] & \text{für } \frac{a}{2} \leq r \leq a, \\ \frac{a}{4} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r} \right) \right] \rightarrow \frac{a}{12} & a \leq r < +\infty \end{cases}$$

Der Kantendefekt verschwindet für die Ortssequenz 0, für die Ortssequenz ∞ erhalten wir als Grenzwert den Defekt der Kantenfunktion.

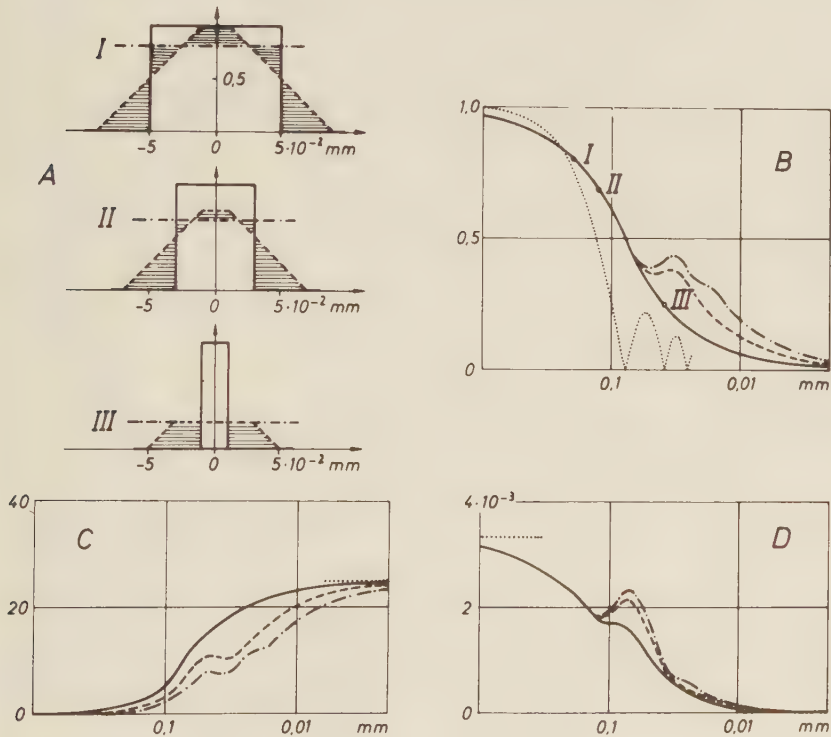


Fig. 23

Darstellung der Kontraststreuung K in Teilfigur B, des Liniendefekts D_L in Teilfigur C und des Kantendefekts D_K in Teilfigur D als Funktion der Ortssequenz $e = 4r$ für die Faltung mit einer Rechteck-Linienfunktion nach (B 1.1) mit $a = 0,04$ mm. Diese Größen sind dargestellt für den Spalttest (—), für den COBB-Test (---) und für den 3-fach-Mirentest (····). Die Abszissenskala ist logarithmisch abgestuft. Für die Punkte I, II und III ist in Teilfigur A veranschaulicht, wie die Kontraststreuung beim Spalttest geometrisch zu interpretieren ist.

In Fig. 23 sind die Kontrasttreue und der Linien- und Kantendefekt für den Spalttest, den COBB-Test und den 3-fach-Mirentest dargestellt. Ferner zeigt Fig. 23 für die Werte I, II und III der Kontrasttreue, wie diese Größe für Spaltteste anschaulich zu interpretieren ist. Bei der Bildung der Kreuzkorrelationsfunktion schneidet die Objektfunktion $0(x)$ aus der Bildfunktion $B(x)$ einen Teilbereich heraus. Der Mittelwert der Bildfunktion in diesem Teilbereich stellt die Kontrasttreue dar.

Wir wollen nun für die vier typischen, experimentell ermittelten Linien- und Kantenfunktionen nach den Fig. 1 bis 4 zeigen, welche Ergebnisse unsere Bewertungstheorie liefert. Diese Ergebnisse sind in den Bildern 24 bis 27 dargestellt. Jedes dieser Bilder enthält

- A die Verschiebung V ,
- B die Kontrasttreue K ,
- C den Liniendefekt D_L und
- D den Kantendefekt D_K .

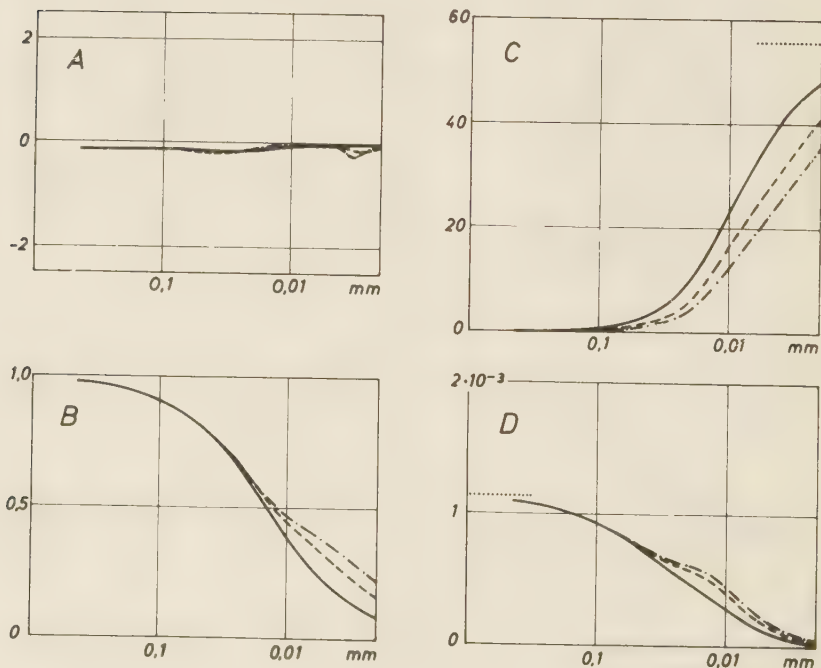


Fig. 24 Mirentest-Bewertungsgrößen bei Faltung durch die Linienfunktion nach Fig. 1A.

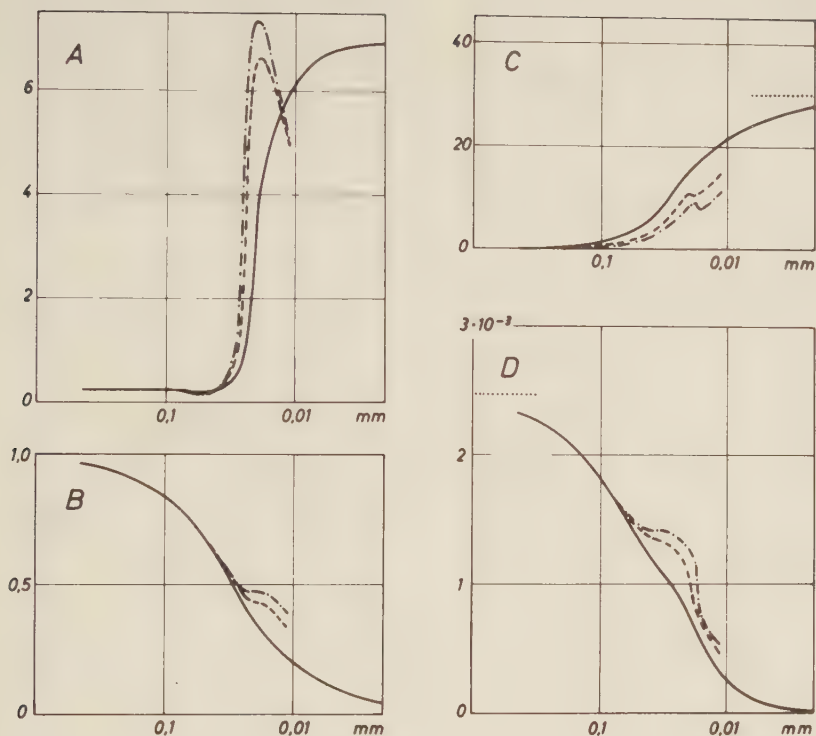


Fig. 25 Mirentest-Bewertungsgrößen bei Faltung durch die Linienfunktion nach Fig. 2 A.

Die Abszissenskalen sind logarithmisch abgestuft. Die Bewertungsgrößen sind jeweils angegeben für den Spalttest, für den COBB-Test und für den 3-fach-Mirentest. Von einer Darstellung der Strukturtreue S und der Differenzgröße T sehen wir ab, weil diese Größen offensichtlich keine zusätzliche Information bringen.

21. Das Aussagevermögen der Bewertungsgrößen

Sinn und Zweck einer Theorie der Bildbewertung muß es sein, Kriterien zu liefern, mit deren Hilfe entschieden werden kann, welches von zwei optischen Abbildungssystemen dem anderen überlegen ist und durch welche Abbildungseigenschaften dies begründet ist. Einen Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe wollen wir nachfolgend zur Diskussion stellen.

Durch die Beziehung (16.17) haben wir den Begriff "Kontrasttreue" eingeführt. In Beispiel 13 wurde gezeigt, daß für eine Cosinusstruktur die Kontrasttreue gleich dem Betrag der "Kontrast"-Übertragungsfunktion ist. Diese Gleichheit war uns Rechtfertigung für die Wahl der Bezeichnung.

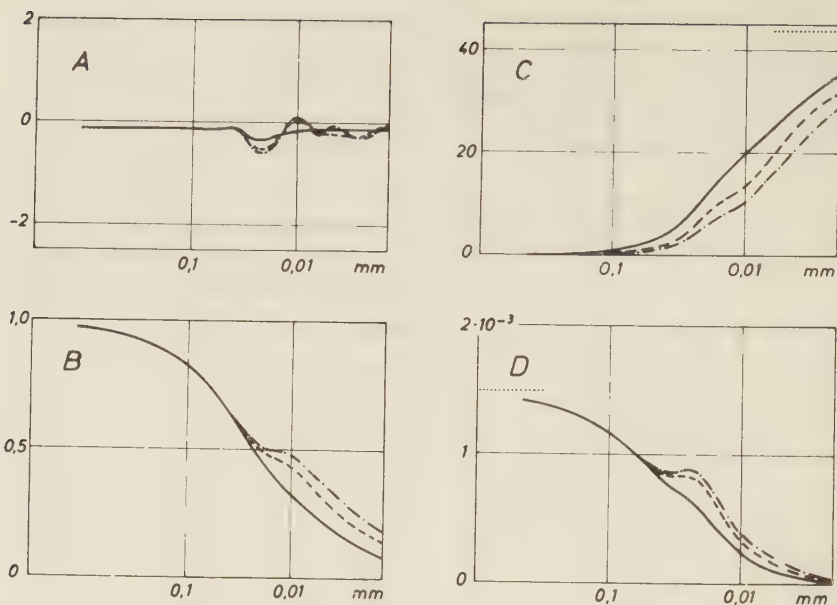


Fig. 26 Mirentest-Bewertungsgrößen bei Faltung durch die Linienfunktion nach Fig. 3 A.

Die Definitionsgleichung (16.17) ist für beliebige Objekt-Bildstrukturen gültig und keinerlei Einschränkungen unterworfen. Daraus folgern wir, daß die Kontrasttreue eine Verallgemeinerung des klassischen Kontrastbegriffes darstellt, der bekanntlich nur für Cosinusstrukturen eindeutig definiert ist. Die klassische, von MICHELSON gegebene Kontrastdefinition lautet

$$(21.1) \quad K = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}} .$$

Da Cosinusgitter wieder in Cosinusgitter abgebildet werden, also zwischen Objekt und Bild bei Berücksichtigung der Verschiebung V Proportionalität besteht, liegt die Gleichheit der beiden Begriffe für diese Objekt-Bildstruktur auf der Hand. Die Feststellung KORNDERS, daß für nichtperiodische Strukturen keine geeignete Kontrastdefinition zu geben ist, konnte nicht bestätigt werden. Die Auffassung, die Strukturtreue sei eine Verallgemeinerung des Kontrastbegriffes, kann nicht anerkannt werden.

Das überraschende, von den seitherigen Vorstellung abweichende Ergebnis dieser Untersuchung liegt im Aussagevermögen der Defektgrößen. Um dies nachweisen zu können, fassen wir die wesentlichen Ergebnisse der vorge-

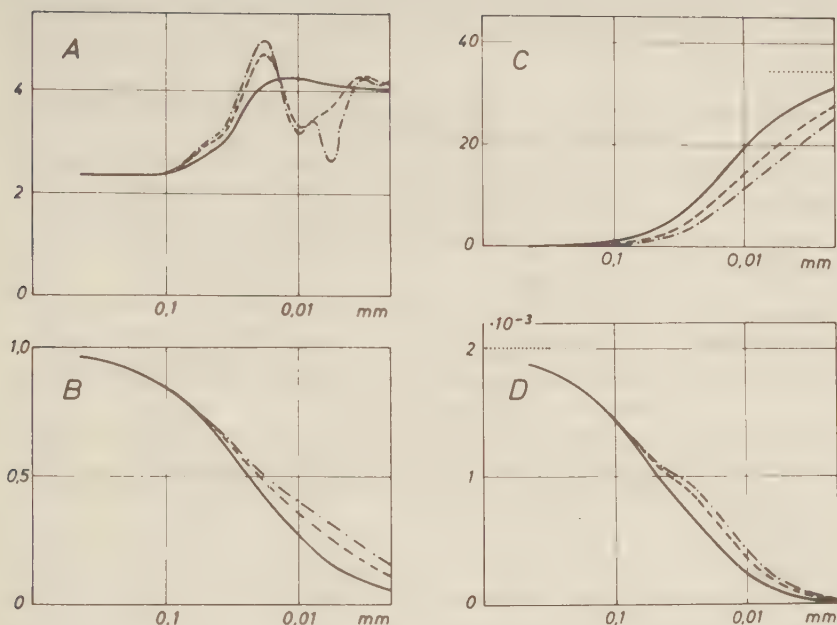


Fig. 27 Mirentest-Bewertungsgrößen bei Faltung durch die Linienfunktion nach Fig. 4 A.

schlagenen Bewertungstheorie in Tabelle 4 zusammen :

In Tabelle 4 wurden alle Größen, die durch eine Liniennormierung gekennzeichnet sind oder direkt aus der Intensitätsfunktion des Linienbildes hergeleitet wurden, dem subjektiven Güteurteil "Detailwiedergabe" zugeordnet. Ganz entsprechend wurden alle Größen, die durch eine Kantennormierung gekennzeichnet sind oder direkt aus der Intensitätsfunktion des Kantenbildes hergeleitet wurden, dem subjektiven Güteurteil "Schärfenwiedergabe" zugeordnet. Die Berechtigung zu dieser Zuordnung entnehmen wir den Defektfunktionen der Bilder 24 bis 27 und auch den Bildern 22 und 23.

Darüber hinaus halten wir als sehr wichtiges Ergebnis fest:

1. Je feiner die zu bewertenden Bildstrukturen sind, desto besser lassen sich dann die Abbildungseigenschaften durch den Defekt mit Liniennormierung, im Grenzfall des Linienbildes durch den Liniendefekt beschreiben. Dabei ist dem größeren Liniendefekt die bessere Detailwiedergabe zugeordnet.

Tabelle 4: Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der vorgeschlagenen Bewertungstheorie

Beliebige Objekt-Bild-Struktur		
Normierung	auf gleichen Flächeninhalt: Liniennormierung	auf gleiche Kantentlänge: Kantennormierung
Normierungsgröße	$H_L = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x) dx$	$H_K = \int_{-\infty}^{+\infty} \left \frac{\partial}{\partial x} O(x) \right dx$
Defekt-Größe	D_L Defekt mit Liniennormierung	D_K Defekt mit Kantennormierung
Singuläre Objekt-Bild-Struktur		
Objekt $O(x)$	Linienobjekt $\delta(x)$	Kantenobjekt $\eta(x)$
Bild $B(x)$	Linienbild $L(x)$	Kantenbild $\kappa(x)$
Defekt-Größe	Liniendefekt $D_L = \int_{-\infty}^{+\infty} L^2(x) dx$	Kantendefekt $D_K = D_+(v_K) + D_-(v_K)$
Kontrasttreue	$k = 0$	$K = 1$
Strukturtreue	$S = 0$	$S = 1$
Zuordnung des subjektiven Güteurteils		
	Detailwiedergabe	Schärfenwiedergabe

2. Je größer die zu bewertenden Bildstrukturen sind, desto besser lassen sich dann die Abbildungseigenschaften durch den Defekt mit Kantennormierung, im Grenzfall des Kantenbildes durch den Kantendefekt beschreiben. Dabei ist dem kleineren Kantendefekt die bessere Schärfenwiedergabe zugeordnet.

Mit den Größen "Liniendefekt" und "Kantendefekt" haben wir zwei physikalische Kriterien für die Kennzeichnung und den Vergleich der Abbildungseigenschaften optischer Systeme gewonnen.

Aufgrund psychometrischer Bildschärfenuntersuchungen stellten HIGGINS und JONES [13] und andere Autoren fest, daß die Bildschärfe stark mit der "Acutance" korreliert. Diese Acutance ist wie die von HERTEL [14] vorgeschlagene "Schroffheit" ein Gradientenkriterium des Kantenbildes, entspricht aber formal weitgehend unserem Liniendefekt. Mit anderen Worten:

der Liniendefekt wird in der Literatur im Gegensatz zu unserer Auffassung als Kriterium für die Schärfe wiedergegeben angesehen. Es ist daher zu untersuchen, ob zwischen dem Liniendefekt und dem Kantendefekt ein Zusammenhang irgendwelcher Art besteht.

Wir definieren als reduzierten Liniendefekt

$$(21.2) \quad (D_L) = \sigma D_L$$

und als reduzierten Kantendefekt

$$(21.3) \quad (D_K) = \frac{D}{\sigma}$$

Das Produkt aus beiden nennen wir "Defektprodukt"

$$(21.4) \quad P = (D_L) \cdot (D_K) = D_L \cdot D_K$$

Es ist unabhängig von der Streubreite s , also eine reine Formgröße. In Tabelle 5 sind diese drei Größen für eine Reihe von Linien- bzw. Kantenfunktionen dargestellt. Da die Defektprodukte - wenn wir von der sehr extremen Dreieckfunktion nach Fig. 6 B und C absehen - in ihrer Größe nicht allzu stark schwanken, ist der nicht reduzierte Linien- bzw. Kantendefekt primär von der Streubreite s abhängig und erst sekundär von der speziellen Form der Linien- bzw. Kantenfunktion. Dieser Umstand erklärt auch, weshalb es innerhalb einer gewissen Genauigkeit möglich ist, den Liniendefekt als Kriterium für die Schärfenwieder-

Tabelle 5: Darstellung des Linien- und Kantendefekts und des Defektprodukts für verschiedene Linien- und Kantenfunktionen, jeweils reduziert auf Streubreite $s = 1$.

Linienfunktion	Figur	D_L	D_K	$D_L \cdot D_K$
Gemessene Linienfunktionen	1	0,3595	0,1767	0,0635
	2	0,2993	0,2489	0,0745
	3	0,3277	0,2726	0,0650
	4	0,3766	0,1843	0,0694
Rechteckfunktion	5A	0,2887	0,2887	0,0833
Glockenfunktion	5B	0,1821	0,3375	0,0615
Dreieckfunktionen	6A	0,2722	0,2449	0,0667
	6B	0,2833	0,4842	0,1372
	6C	0,3143	1,0342	0,3250

gabe anzusehen. Die Güte der Beschreibung der Schärfenwiedergabe durch den Liniendefekt ist also im wesentlichen durch die Schwankung des Defektprodukts bestimmt.

Von diesem Standpunkt aus besteht daher das Bedürfnis nach einer psychometrischen Untersuchung, ob der von uns angenommene korrelative Zusammenhang zwischen Liniendefekt und Detailwiedergabe einerseits und zwischen Kantendefekt und Schärfenwiedergabe andererseits wirklich besteht. Eine solche Untersuchung hätte auch zu klären, welche Metrikbeziehung zwischen den physikalischen Defektgrößen einerseits und der psychometrischen erhaltenen Wiedergabegröße andererseits existiert. Es ist jedoch nicht Ziel dieser Arbeit, diese Frage zu klären.

22. Zusammenfassung der Ergebnisse

Die systematische Untersuchung bekannter Bildgütekriterien hat gezeigt, daß ihrer Struktur nach zwei Gruppen zu unterscheiden sind.

Die erste Gruppe ist dadurch gekennzeichnet, daß aus der Intensitätsfunktion oder der Übertragungsfunktion nach irgendeiner Vorschrift eine oder mehrere Größen gewonnen und als Leistungskennziffern definiert werden. Das GAUSZ-Moment und die relative Gipfelhöhe sind Größen dieser Art. Es wird gezeigt, daß beide Größen nur erste Glieder von Darstellungen sind, welche die Abbildungseigenschaften ebenso vollständig beschreiben wie die Intensitätsfunktion oder die Übertragungsfunktion. Mit Hilfe der HERMITE'schen Funktionen wird gezeigt, wie aus der Folge der Intensitätsmomente - das GAUSZ-Moment ist das Intensitätsmoment 2-ter Ordnung - sowohl die Linien- als auch die Übertragungsfunktion bestimmt werden kann und umgekehrt. Die Entwicklungskoeffizienten einer derartigen HERMITE'schen Darstellung sind ebenfalls für die eindeutige Beschreibung der Abbildungseigenschaften geeignet. Diese erste Gruppe von Bildgütekriterien ist - falls sie vervollständigt bzw. verallgemeinert werden - für die physikalisch eindeutige Kennzeichnung des Abbildungszustandes geeignet in dem Sinne, wie die Abbildung durch die Intensitäts- oder Übertragungsfunktion darstellbar ist, erlaubt aber keine unmittelbare, in Zahlen ausdrückbare Bewertung der Abbildungsleistung.

Für die zweite Gruppe von Bildgütekriterien ist charakteristisch, daß beliebige Objektstrukturen mit den diesen durch Abbildung zugeordneten Bildstrukturen verglichen werden. Dabei wurde ein Maß definiert, das die Ähnlichkeit von Objekt und Bild beschreibt. Eine bei LINFOOT im Ansatz gegebene und von FRANKE weiterentwickelte Theorie der Bildbewertung wurde so erweitert, daß sie auf die Abbildung durch Linienfunktionen mit asymmetrischen Fehleranteilen anwendbar wurde. Die Anwendung der Theorie auf Linien- und Kantenteste und auf Gitter- und Mirenteste wurde explizit gezeigt. Als Ergebnis ist festzuhalten, daß die Abbildungsleistung eines optischen Systems durch den Liniendefekt, der dem bekannten Acutance-Kriterium entspricht, und den Kantendefekt schon gut bewertet werden kann. Nur eine dieser Defektgrößen ist für eine ausreichende Bewertung der Abbildungsleistung nicht ausreichend.

Ein Nebenergebnis dieser Untersuchung ist eine verallgemeinerte Fassung des Kontrastbegriffes. Ein weiteres Nebenergebnis ist ein relativ einfaches Verfahren für die numerische Bestimmung der Intensitätsmomente aus den Strahldaten einer Strahldurchrechnung. Ferner wird der Zusammenhang zwischen den Intensitätsmomenten von Punkt- und Linienbildern mitgeteilt. Die Grenzen der additiven Kombinierbarkeit zweier linearer Abbildungen werden aufgezeigt.

Literaturverzeichnis

- [1] DUFFIEUX, P.M.: L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique; Besancon-Rennes 1946, Selbstverlag.
- [2] LINFOOT, E.H.: Qualitätsbewertung optischer Bilder; Fr. Viehweg u. Sohn, Braunschweig, 1960.
- [3] FRANKE, G.: Résolution et corrélation; Revue d'Optique 46 (1967) S. 179 - 182.
- [4] WOLTER, H.: Verfahren zur beliebig genauen Berechnung einer Originalnachricht aus endlich vielen Beobachtungen hinter einem Rechteckbandpaß; AEÜ 13 (1959) S. 393 - 404.
- [5] LUKOSZ, W.: Zur geometrisch-optischen Übertragungstheorie der inkohärenten optischen Abbildung; Dissertation TH Braunschweig, 1958.
- [6] WOLTER, H.: Zur genauigkeitssteigerung optischer Messungen durch Minimumstrahlkennzeichnung; Zeitschr. Naturforschung 5a (1950) S. 139 - 143.
- [7] WOLTER, H.: Progress in Optics I; North Holland Publishing Comp., Amsterdam 1961.
- [8] MARCHAND, E.W.: On the Width of Spread Funktions; JOSA 54, (1962) 2, S. 263 - 264.
- [9] KÄMMERER, j.: Vergleich verschiedener Bildgütekriterien unter besonderer Berücksichtigung des Minimalobjekts; Dissertation TU Berlin D 83, 1959.
- [10] KULIK, W.T.: Prinzipien der Algorithmsierung des Aufbaus von Regengeräten; Gostechisdat UdSSR, 1963. Zitiert nach J.A. MÜLLER, msr 10 (1967) 1, S. 34 - 40.
- [11] KULIK, W.T.: Digitale Modellierung komplizierter Systeme; Publ. der Kiewer Universität 1964. Zitiert wie [10] .
- [12] KORNDER, F.: Bildgütekriterien und ihre Anwendung auf Gitter- und Linienstrukturen; Dissertation U Gießen D 83, 1968.
- [13] HIGGINS, G.C. and JONES, L.A.: The nature and evaluation of the sharpness of photographic images; ISMPTE 58 (1952), S. 277 - 290.
- [14] HERTEL, J.: Neue Methoden zur Prüfung und Bewertung von Objekten; Dissertation TU Berlin D 83, 1963.

Ferner:

- [15] FRANKE, G.: Photographische Optik; Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1964.
- [16] RÖHLER, R.: Informationstheorie in der Optik; Wissenschaftliche Verlags-GmbH., Stuttgart, 1967.
- [17] Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55.

Herrn Prof. Dr. H. Wolter danke ich sehr herzlich für die Betreuung dieser Untersuchung und für Diskussionen. Außerdem gilt mein Dank der Firma ERNST LEITZ GmbH. Wetzlar, die diese Arbeit sehr großzügig unterstützt hat, sowie Frau I. Bastert für Hilfe bei der Anfertigung der Zeichnungen und den Herren H. Strack und R. Würz für die Durchführung der Programmierungsarbeiten. Einigen Kollegen danke ich für Diskussion der Ergebnisse.

Lebenslauf

Am 17.5.1930 wurde ich in Oberwaldbach, Kreis Günzburg, geboren. Im Sommer 1950 legte ich an der Oberschule Günzburg die Reifeprüfung ab und begann im selben Jahr an der Universität Tübingen ein Physikstudium. Die Diplom-Vorprüfung legte ich dort 1953 ab. Nach zwei Semestern Physikstudium an der Universität Kiel wechselte ich 1955 an das neu gegründete Institut für Angewandte Physik der Universität Marburg über, wo ich im Sommer 1957 die Diplom-Hauptprüfung ablegte. Nach einer zweieinhalbjährigen Tätigkeit als Patentsachbearbeiter in der Firma ERNST LEITZ GmbH, Wetzlar trat ich 1960 in das Fotorechenbüro dieser Firma ein. Die vorliegende Untersuchung wurde im Rahmen meiner Tätigkeit in diesem Fotorechenbüro durchgeführt.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten Braunbek, Brandt, Eichler, Flügge, Hückel, Israel-Köhler, Kamke, Kneser, Knopp, Kossel, Kroebel, Lochte-Holtgreven, Menzel, Möllenstedt, Müller, Pickert, Tischner, Weisedel, Wielandt, Wittig, Wolter und Unsöld.

